Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann
Fachgebiet Baustatik
Fachbereich 14 Bauingenieurwesen

UNIKASSEL
VERSITÄT

Projekt 3

Verbesserte Berechnung von lokalen Zielgrößen mit der Methode der finiten Elemente unter Verwendung von Grundlösungen

von

Thorsten Kunow

Bearbeitungszeit: WS 2002/2003, SS 2003

Betreuer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theorie **4**
2.1 Der Satz von Betti 4
2.2 Die Greensche Funktion und ihre Eigenschaften 5
2.3 Die Grundlösung der Platte und ihre Ableitungen 6
2.4 Die Randkorrektur 8
2.5 Verbesserung der FE-Ergebnisse 8
2.6 Ein Beispiel aus der Balkenstatik 9
2.6.1 Die FE-Berechnung 9
2.6.2 Berechnung mit verbesserter Einflussfunktion 10
2.7 Transformation vom Gebietsintegral in ein Randintegral 12

3 Verbesserung der FE-Ergebnisse **15**
3.1 Kirchhoff-Platte 15
3.2 Das bikubische Plattenelement 17
3.3 Die Randkorrektur 19
3.3.1 Starr eingespannter Rand 20
3.3.2 Gelenkig gelagerter Rand 20
3.3.3 Freier Rand 22
3.4 Die reguläre Lösung 23
3.5 Berechnung der Zielgröße 23

4 Programmbeschreibung **25**
4.1 Der logische Programmaufbau 25
4.2 Verbesserung von Punktwerten 25

5 Numerische Ergebnisse **28**
5.1 Gelenkig gelagerte Rechteckplatte 28
5.2 Eingespannte Rechteckplatte 29
5.3 L-Platte 32
5.4 Quadratplatte mit Einzellast 33
5.4.1 Betrachtung der Querkraft q_n 35

6 Zusammenfassung und Ausblick **39**

1 Einleitung

In der Literatur konnte gezeigt werden, dass die Genauigkeit einer FE-Berechnung direkt davon abhängig ist, wie genau die Greensche Funktion mit der Methode der finiten Elemente dargestellt werden kann. Das FE-Ergebnis einer lokalen Zielgröße F kann über den Integralausdruck

$$F = \int_0^l G^h(y,x)\, p(y)\, dx \tag{1.1}$$

nachgerechnet werden. Dabei ist $G^h(y,x)$ gerade die vom FE-Programm genäherte Greensche Funktion und $p(y)$ die auf das System wirkende Belastung. Das FE-Programm greift bei der Darstellung der Einflussfunktion auf die Einheitsverformungen des Elementes zu. So wird vom FE-Programm z.B. die Einflussfunktion für die Querkraft wie in Abb. 1.1 gezeigt abgebildet.

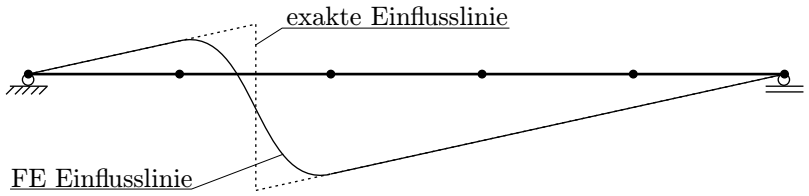

Abb. 1.1: Exakte und durch die Einheitsverformungen erzeugte Einflussfunktion.

Ein neuer Gedanke ist es jetzt, die Greensche Funktion in eine Grundlösung und einen regulären Anteil aufzuteilen. Dabei ist die Grundlösung bekannt und nur der reguläre Anteil muss vom FE-Programm approximiert werden.

Der Vorteil dieser Methode ist, dass die Grundlösung die vom FE-Programm schwer darzustellende Sprungbedingung enthält und so die Einflussfunktion genauer berechnet werden kann. Dadurch ist eine Verbesserung im Genauigkeitsgrad von Punktwerten zu erwarten. Erste Untersuchungen für die zweidimensionale Elastizitätstheorie haben dies gezeigt.

In dieser Projektarbeit werden die Grundlagen dieser Methode behandelt und die Vorgehensweise zur Implementierung in das bestehende FE-Programm dargestellt.

2 Theorie

In der vorliegenden Arbeit sollen die Kraft- und Weggrößen der FE-Berechnung unter Verwendung von Grundlösungen verbessert werden. Es werden die Grundlösungen und ihre Eigenschaften erläutert. Die Konstruktion der Greenschen Funktion im allgemeinen Fall mit Hilfe der Grundlösung wird skizziert, so dass die Idee hinter der hier behandelten Berechnungsmethode offensichtlich wird. Das im Programm verwendete Plattenelement wird dargestellt. Für weiterführende Grundlagen wird auf die aufgeführte Literatur verwiesen.

2.1 Der Satz von Betti

Der Satz von Betti stellt in der Statik eine zentrale Rolle dar. In Worten formuliert besagt der Satz, dass die Arbeiten, die die Kräfte des ersten Systems auf den Wegen des zweiten Systems leisten, gleich den Arbeiten sind, die die Kräfte des zweiten Systems auf den Wegen des ersten Systems leisten. Dieser Satz bildet die Grundlage für die Methode der Randelemente.

Ausgehend von einer Differentialgleichung, hier die Differentialgleichung der Platte, erhält man den Satz von Betti (auch 2. Greensche Identität genannt) durch mehrmalige partielle Integration des Arbeitsintegrals

$$\int_\Omega K\,\Delta\Delta w\,\hat{w}\,d\Omega\,.$$

Der Differentialoperator $\Delta\Delta$ (Δ ist der Laplace-Operator) wird dabei auf die Funktion $\hat{w}$ übertragen. Man erhält so die Formulierung

$$\begin{aligned} B(w,\hat{w}) \;=\; & \int_\Omega K\,\Delta\Delta w\,\hat{w}\,d\Omega + \int_\Gamma (V_n\,\hat{w} - M_n\frac{\partial \hat{w}}{\partial n} + \hat{M}_n\frac{\partial w}{\partial n} - \hat{V}_n\,w)\,ds + \\ & + \sum_e [F(w)(\boldsymbol{x}^e)\hat{w}(\boldsymbol{x}^e) - F(\hat{w})(\boldsymbol{x}^e)w(\boldsymbol{x}^e)] - \\ & - \int_\Omega w\,K\,\Delta\Delta\,\hat{w}\,d\Omega = 0\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Um nun die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$ an einem vorgegebenen Punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ zu erhalten, wird für die Funktion $\hat{w}$ die Greensche Funktion $G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ eingesetzt. Mit dem Satz von Betti erhält die zweite Greensche Identität eine physikalische Bedeutung. Es leisten jeweils die Kräfte des einen Zustands Arbeit auf den Wegen des anderen Zustands.

Der Einfachheit halber wird der Summenausdruck über die Eckkräfte zu Null gesetzt und der Rand als eingespannt gelagert angenommen, so dass man mit der Dirac Delta-Funktion

$$K\,\Delta\Delta\,G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x}$ erhält.

$$w(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\Omega} p(\boldsymbol{y}) G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, d\Omega + \int_{\Gamma} (V_n\, G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - M_n \frac{\partial G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n})\, ds \tag{2.2}$$

Durch Einsetzten von $w(\boldsymbol{x})$ in die Differentialgleichung kann z.B. die Verdrehung, die Momente oder die Querkraft/ den Kirchhoffschub an der Stelle $\boldsymbol{x}$ berechnet werden. Um die gewählte Größe zu erhalten, ist auf der rechten Seite folglich die Funktion $G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ entsprechend in die Differentialgleichung einzusetzen.

2.2 Die Greensche Funktion und ihre Eigenschaften

Aus der Sicht der Statik ist die Greensche Funktion eine Einflussfunktion für die gesuchte Kraft- oder Weggröße. Die Einflussfunktion erhält man, indem das betrachtete Tragwerk mit einer zur gesuchten Größe dualen Last der Größe '1' belastet wird. Die daraus resultierende Biegelinie (-fläche) ist die gesuchte Einflussfunktion. Durch die Auswertung

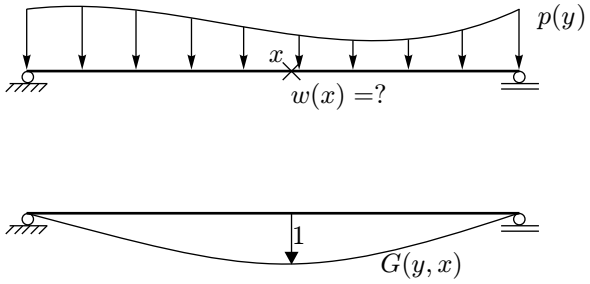

Abb. 2.1: An der Stelle x wird die Durchbiegung über die Einflussfunktion bestimmt.

des Integralausdruckes

$$w(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy \tag{2.3}$$

für den Balken erhält man die Durchbiegung an der Stelle x für beliebige Belastungsfunktionen. Für die Darstellung der Greenschen Funktion der Platte, setzte man Vektoren anstelle der skalaren Größen ein. Die analytische Lösung für die Platte gestaltet sich deutlich schwieriger als für den Balken. In Abhängigkeit der Geometrie sind analytische Lösungen des Problems nicht möglich.

Betrachtet man die statische Vorgehensweise zur Berechnung einer Einflussfunktion, so lassen sich die folgenden Eigenschaften ablesen.

1. Die Greensche Funktion ist zumindest stückweise stetig.

2. Für beliebiges festes x gilt:

(a) Setzt man die Greensche Funktion in die homogene Differentialgleichung ein, so ist diese erfüllt.

(b) Die Greensche Funktion erfüllt die Randbedingungen.

(c) An der Stelle x ist eine Sprungbedingung zu formulieren.

Aus der Sicht der Mathematik sucht man für eine gegebene Randwertaufgabe, z.B. $EI\, w^{IV} = p$, den Integraloperator, mit dessen Hilfe die vorliegende Aufgabe gelöst werden kann. Die Integraldarstellung stellt eine andere Formulierung der Differentialgleichung dar, ohne dass die Randbedingungen für das System angegeben werden müssen; die Vorgaben des für die Randbedingungen sind in der Greenschen Funktion enthalten. Der Operator ist unabhängig von der rechten Seite der Differentialgleichung, d.h. unabhängig davon, welche Belastung auf das System aufgebracht wird. Die Lösung lässt sich wieder in der Form von Gl. (2.3) darstellen. Die Konstruktion der Greenschen Funktion ist allerdings grundlegend anders als in der Statik.

Die Greensche Funktion $G(y, x)$ wird aufgeteilt in eine Grundlösung g und einen Randkorrekturterm u_R

$$G(y, x) = g(y, x) + u_R(y, x)\,. \tag{2.4}$$

Die Grundlösung erfüllt alle oben aufgeführten Eigenschaften bis auf die Eigenschaft 2b und wird durch den Randkorrekturterm so angepasst, dass die Greensche Funktion die gegebenen Randbedingungen einhält. Die vorhandenen Eigenschaften der Grundlösung bleiben erhalten.

Diese Vorgehensweise zur Bestimmung einer Greenschen Funktion hat den Vorteil, dass für gleiche Tragwerkstypen (Stab, Balken, Scheibe oder Platte) die bekannte Grundlösung verwendet werden kann und nur die Randdaten an die gegebene Aufgabe angepasst werden müssen.

2.3 Die Grundlösung der Platte und ihre Ableitungen

Die Grundlösungen der Platte sind [8] entnommen und werden somit als bekannt vorausgesetzt. Die Grundlösung g_0 wurde über eine Kreisplatte mit dem Radius r ermittelt. Um die erhaltene Funktion weiter zu vereinfachen, wurde der Rand der Kreisplatte ins Unendliche verlegt, $r \to \infty$, und somit lautet die Grundlösung für die Durchbiegung der Platte

$$g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi K} r^2 \ln r\,. \tag{2.5}$$

Alle weiteren Grundlösungen werden aus der ersten Grundlösung g_0 gemäß den Lösungen der Plattendifferentialgleichung für die Weg- und Kraftgrößen entwickelt. In Abb. 2.2 a

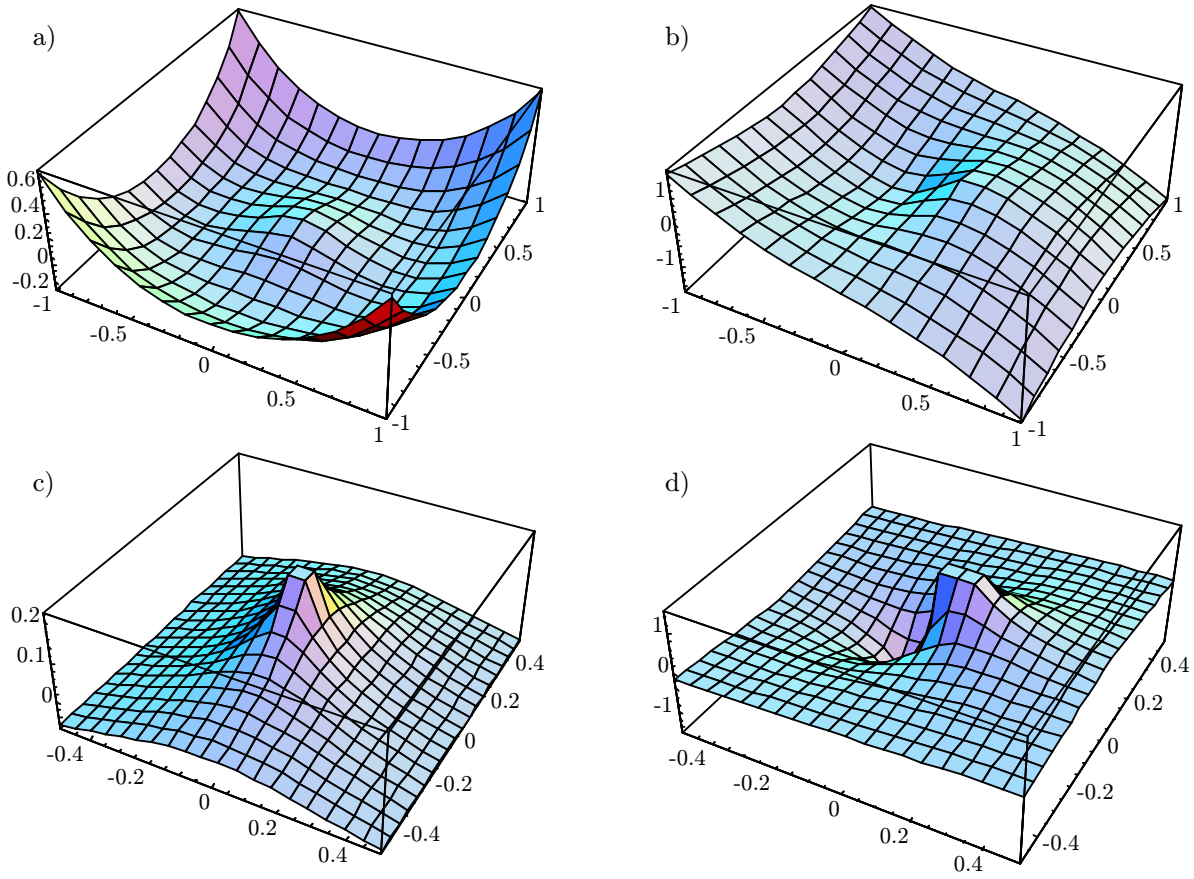

Abb. 2.2: a) Grundlösung $g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ für die Durchbiegung w, b) Grundlösung $g_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ für die Verdrehung w_n, c) Grundlösung $g_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ für das Moment m_n, d) Grundlösung $g_3(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ für den Kirchhoffschub v_n.

und b sind die ersten beiden Grundlösungen dargestellt. Bei der Grundlösung für die Verdrehung wurde exemplarisch die Verdrehung in x-Richtung ausgewählt.

Bemerkenswert ist die Biegefläche der ersten Grundlösung g_0 im Bereich vom Radius $r = 1$ um den Nullpunkt. Erzeugt wird die Grundlösung aus Statiker-Sicht, indem man eine vertikale Kraft der Größe "1" im Nullpunkt auf eine Kreisplatte aufbringt und die daraus resultierende Biegefläche berechnet. Den Abstand der Ränder lässt man dann gegen unendlich gehen. Man sollte annehmen, dass sich eine nach oben gekrümmte Fläche ausbildet, die im Punkt der Lasteinleitung den tiefsten Punkt hat. Die Biegefläche der Gl. (2.5) hat aber ein Minimum im Abstand von $r = 0,5$ vom Nullpunkt.

Eine Betrachtung der beiden miteinander multiplizierten Funktionen r^2 und $\ln r$ liefern die Erklärung dafür. Die Funktionen r^2, $\ln r$ und $r^2 \ln r$ sind in Abb. 2.3 dargestellt. Die hier verwendete Grundlösung ist nur eine von vielen. Es können zu der Funktion weitere Terme addiert werden, so dass sich der Verlauf des Graphen ändert.

Die Grundlösungen für das Moment m_n und den Kirchhoffschub v_n sind in der Abb.

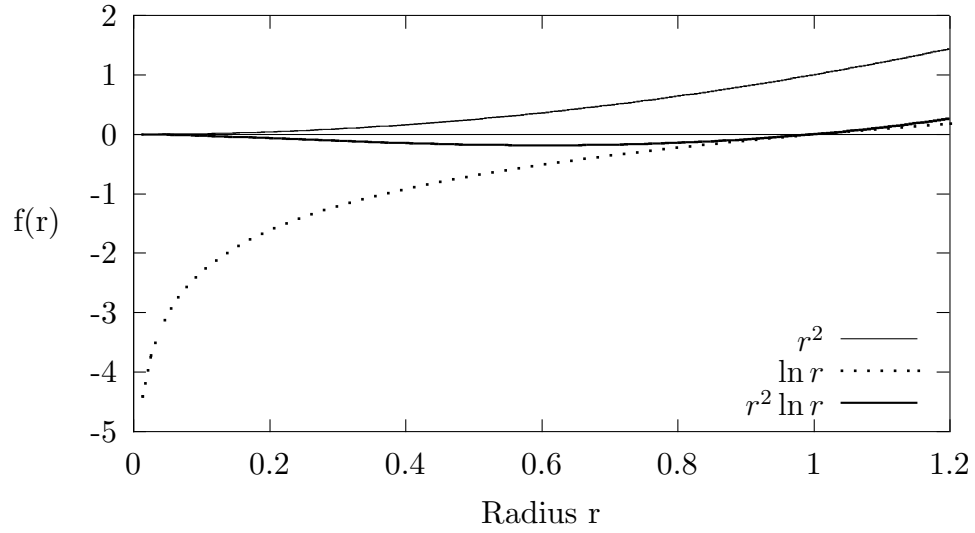

Abb. 2.3: Darstellung der drei Funktionen r^2, $\ln r$ und $r^2 \ln r$

2.2 c und d zu sehen. Dabei wurde für beide Grundlösungen wieder exemplarisch eine Richtung ausgewählt. Da die Verformungen im Punkt $\boldsymbol{x}$unendlich groß sind, wurde die Biegefläche vom Mathematik-Programm ab eine bestimmten Wert gekappt.

2.4 Die Randkorrektur

Wurde für eine gegebene Differentialgleichung die Grundlösung ermittelt, so bleibt noch die Aufgabe, den für jedes System unterschiedlichen Randkorrekturterm zu bestimmen. Im speziellen Fall, z.B. Kreisplatte mit gelenkiger Lagerung oder Rechteckplatte mit Randeinspannung, kann diese Randkorrektur analytisch berechnet werden. Der Zusatzterm hat die Aufgabe, die Grundlösung so zu verändern, dass die Summe aus beiden Funktionen gerade die Eigenschaften der Greenschen Funktion erfüllen, d.h. das die Randbedingungen eingehalten werden.

Im allgemeinen Falle ist es alles andere als trivial, diesen Randkorrekturterm zu bestimmen, so dass es nahe liegt, dafür ein Näherungsverfahren, wie z.B. die Methode der finiten Elemente, zu verwenden.

2.5 Verbesserung der FE-Ergebnisse

Um eine Verbesserung der FE-Ergebnisse zu erhalten wird die Randelementmethode mit der Methode der finiten Elemente kombiniert. Der FE-Methode fehlt bei den Schnittgrößen der exakte Knick oder Versatz von '1'; das liefern gerade die Grundlösungen der Greenschen Funktionen. Diese halten allerdings die vom System gegeben Randbe-

dingungen nicht ein. Diese Korrektur der Randdaten wird mit einer FE-Berechnung vorgenommen. Zu erwarten ist, dass dadurch die Einflussfunktion deutlich verbessert wird. Die Folge davon sollte sein, dass die so ermittelten Ergebnisse besser sind als die 'normalen' FE-Ergebnisse.

2.6 Ein Beispiel aus der Balkenstatik

Anhand eines einfachen Beispiels soll die Technik zur Berechnung einer Zielgröße mit einer verbesserten Einflussfunktion verdeutlicht werden. Als System wird der in Abb. 2.4 dargestellte Kragträger gewählt. An der Stelle $x = 1,1\,m$ soll die Querkraft zunächst mit der "normalen" FE-Methode berechnet werden. Anschließend wird die Querkraft mit der verbesserten Einflussfunktion, der Greenschen Funktion, berechnet.

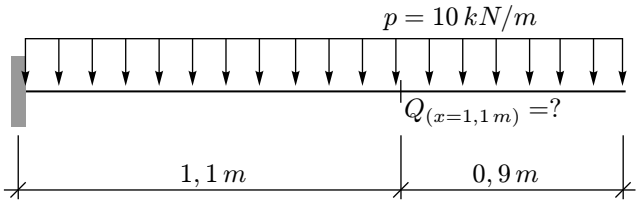

Abb. 2.4: An der Stelle $x = 1,1\,m$ wird mit der FE-Methode und mit verbesserter Einflussfunktion die Querkraft bestimmt.

2.6.1 Die FE-Berechnung

Der Kragbalken wird in zwei Elemente der Länge $1,0\,m$ unterteilt, siehe Abb. 2.5. Die

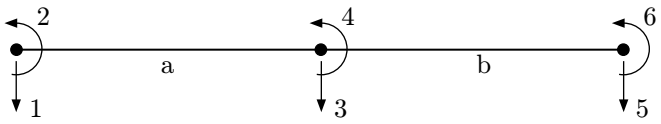

Abb. 2.5: FE-Modellierung des Kragträgers.

Streckenlast wird für die FE-Berechnung in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet. Man erhält als Knotenlastvektor

$$\boldsymbol{p}^T = \begin{bmatrix} 5 & -5/6 & 10 & 0 & 5 & 5/6 \end{bmatrix} .$$

Aufgrund der Randbedingungen sind die Weggrößen u_1 und u_2 bekannt, $u_1 = u_2 = 0$, die Kraftgrößen sind entsprechend am ersten Knoten unbekannt. Umgekehrtes gilt für den zweiten und dritten Knoten. Folglich müssen über die FE-Berechnung die Weggrößen

$u_3 \dots u_6$ bestimmt werden. Man erhält das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & -6l \\ 0 & 8l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 5/6 \end{bmatrix}, \qquad l = 1\,m\,.$$

Mit $EI = 1$ erhält man die folgenden Knotenverformungen,

$$u_3 = 7\frac{1}{12}, \quad u_4 = -11\frac{2}{3}, \quad u_5 = 20 \quad \text{und} \quad u_6 = -13\frac{1}{3}\,.$$

Gemäß der FE-Methode wird die Biegelinie nach der Gleichung

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^{6} w_i\,\varphi_i(x) \tag{2.6}$$

bestimmt. Die Biegelinie, eingesetzt in die Differentialgleichung für die Querkraft, ergibt

$$Q_h(x) = -EI\,w_h'''(x) = -\sum_{i=1}^{6} w_i\,\varphi_i'''(x)\,. \tag{2.7}$$

Die dritten Ableitungen der vier Einheitsverformungen $\varphi_1 \dots \varphi_4$ des Biegebalkens lauten

$$\varphi_1''' = \frac{12}{l^3}, \quad \varphi_2''' = -\frac{6}{l^2}, \quad \varphi_3''' = -\frac{12}{l^3} \quad \text{und} \quad \varphi_4''' = -\frac{6}{l^2}\,.$$

Damit erhält man für die Querkraft an der Stelle $x = 1,1\,m$

$$Q_h^b(x = 0,1) = -(7\frac{1}{12}\cdot 12 + 11\frac{2}{3}\cdot 6 - 12\cdot 20 + 13\frac{1}{3}\cdot 6) = 5\,kN\,.$$

Aufgrund des Polynomgrades der Einheitsverformungen ist die Querkraft für das Balkenelement stets konstant, unabhängig davon, ob z.B. eine Gleichstreckenlast oder eine dreiecksförmige Last aufgebracht wird.

2.6.2 Berechnung mit verbesserter Einflussfunktion

Die Greensche Funktion wird in eine Grundlösung und einem Randkorrekturterm aufgeteilt.

$$G_0(y,x) = g_0(y,x) + u_R \tag{2.8}$$

Die Grundlösung für den Balken lautet

$$g_0(y,x) = \frac{1}{6\,EI}\begin{cases} \alpha(x)\,y - (1-x)\,y^3 + 1, & y \le x, \\ (y-x)^3 + \alpha(x)\,y - (1-x)\,y^3 + 1, & x \le y \end{cases} \tag{2.9}$$

mit $\alpha(x) = x(1-x)(2-x)\,.$

Die Grundlösung für die Querkraft erhält man durch dreimaliges Ableiten. Damit erhält man

$$g_3(y,x) = -EI\frac{d^3}{d\,x^3}g_0(y,x) = \begin{cases} -y, & y \le x, \\ 1-y, & x \le y\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Die Grundlösung ist in Abb. 2.6 dargestellt. Der Ursprung wurde in das linke Auflager gelegt, so dass für $x = 1,1\,m$ in die Gleichung eingesetzt wurde.

Als nächstes ist die Korrektur auf dem Rand vorzunehmen, d.h. zu der Grundlösung wird ein Term so hinzuaddiert, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Dazu werden an den Lagern die negativen Weggrößen und an den freien Rändern die negativen Kraftgrößen der Grundlösung aufgebracht. Die Summe ergibt auf dem Rand gerade Null. Die Weg- und Kraftgrößen wirken dabei auf ein aus einem Element bestehenden FE-System als Belastung. Es wird sich an die Vorzeichendefinition der FE-Methode gehalten.

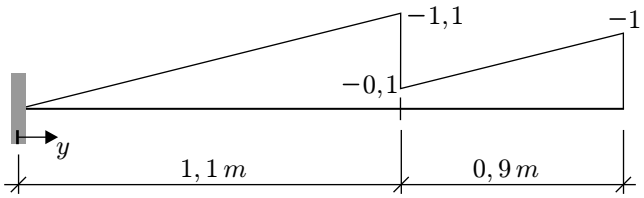

Abb. 2.6: Grundlösung der Greenschen Funktion für $x = 1,1\,m$.

Die Weggrößen erhält man aus der Grundlösung direkt, bzw. aus der ersten Ableitung, siehe Abb. 2.7. Die Knotenkraft f_4 und f_3 berechnen sich aus der zweiten bzw. dritten Ableitung der Grundlösung. Beide sind identisch Null, $g_3'' = g_3''' \equiv 0$.

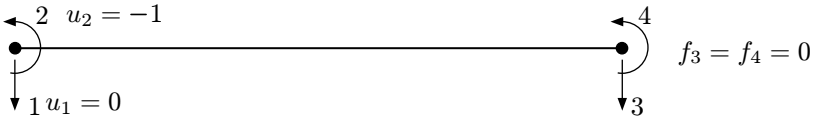

Abb. 2.7: Zur Korrektur der Grundlösung aufgebrachte Belastung.

Mit der Gleichung $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ erhält man das folgende Gleichungssystem.

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad l = 2\,m$$

Für die Weggrößen u_3 und u_4 erhält man die folgenden Werte

$$u_3 = 2 \quad \text{und} \quad u_4 = -1\,.$$

Damit ergibt sich u_r zu

$$\begin{aligned} u_R &= \sum_{i=1}^{4} u_i\,\varphi_i = -\varphi_2 + 2\,\varphi_3 - \varphi_4 \\ &= y - \frac{2\,y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} + \frac{6\,y^2}{l^2} - \frac{4\,y^3}{l^3} - \frac{y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} \\ &= y - \frac{3\,y^2}{l} + \frac{6\,y^2}{l^2} + \frac{2\,y^3}{l^2} - \frac{4\,y^3}{l^3}, \qquad \text{mit} \quad l = 2\,m \\ u_R &= y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{6}{4}y^2 + \frac{2}{4}y^3 - \frac{4}{8}y^3 = y\,. \end{aligned}$$

Die Randkorrektur wurde mit der Methode der finiten Elemente berechnet. Addiert man die Randkorrektur zur Grundlösung, so erhält man folgendes Ergebnis für die verbesserte Einflussfunktion, siehe Abb. 2.8.

$$G_3^+ = \begin{cases} -y + y = 0, & y \le x, \\ 1 - y + y = 1, & x \le y\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Im Falle des Balkens entspricht die verbesserte Einflussfunktion genau der exakten

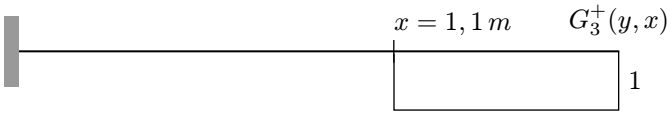

Abb. 2.8: Verbesserte Einflussfunktion.

Einflussfunktion, man erhält daher auch das exakte Ergebnis für die Querkraft.

Die Überlagerung der Greenschen Funktion G_3^+ mit der Belastung p ergibt für die Querkraft

$$Q^+(x) = \int_0^l G_3^+(y,x)\,p(y)\,dy = \int_{1,1}^{2} 1 \cdot 10\,dy = [10\,y]_{1,1}^2 = 9\,kN\,.$$

Im Falle des Biegebalkens erhält man über diese Methode die exakte Greensche Funktion und somit auch das exakte Ergebnis für die Querkraft an der Stelle $x = 1,1\,m$.

2.7 Transformation vom Gebietsintegral in ein Randintegral

Um die Gebietsintegrale einfacher berechnen zu können, werden diese in ein Randintegral überführt. Dabei wird die Belastung p als konstant vorausgesetzt. Die Vorgehensweise ist in [8] beschrieben. Zur Anwendung kommt hier die erste Greensche Formel für den ebenen Fall. Allgemein lautet dieser Satz

$$\int_\Omega (P\Delta Q - Q\Delta P)d\Omega = \int_\Gamma \left(P\frac{\partial Q}{\partial n} - Q\frac{\partial P}{\partial n}\right) ds\,. \tag{2.12}$$

Dabei ist $\Delta Q = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$ und $\dfrac{\partial Q}{\partial n}$ die Ableitung der äußeren Normalen auf dem Rand. Der Rand wird im mathematisch positiven Sinn durchlaufen.

Setzt man, wie oben gefordert, die Funktion $P = p = \text{const.}$, so ergibt sich für die Überführung des Gebietsintegrals in ein Randintegral

$$p \int_{\Omega} (\Delta Q) d\Omega = p \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial n} \right) ds \,. \tag{2.13}$$

Es muss die Stammfunktion von $\Delta Q = g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ gebildet werden und von der wird die Richtungsableitung normal zum Rand berechnet.

Die Stammfunktion der Grundlösung $g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ lautet

$$\frac{1}{8\pi K} \frac{r^4}{32} (2 \ln r - 1) \quad \text{mit} \quad r = r(x, y) \tag{2.14}$$

und damit kann das Gebietsintegral mit der Belastung $p = 1$ durch folgenden Ausdruck dargestellt werden.

$$\frac{1}{8\pi\, K} \int_{\Omega} r^2 \ln r \, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{64\,\pi\, K} \int_{\Gamma} r^3 (2 \ln r - \frac{1}{2}) r_\nu \, ds_{\boldsymbol{y}} \tag{2.15}$$

Für die erste Ableitung der Grundlösung, der Grundlösung $g_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ lautet die Umformung des Gebietsintegrals in ein Randintegral

$$\frac{1}{8\pi\, K} \int_{\Omega} r(1 + 2 \ln r) r_n \, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{64\,\pi\, K} \int_{\Gamma} \{ r^2 [(6 \ln r + \frac{1}{2}) r_n r_\nu + (2 \ln r - \frac{1}{2}) r_\tau r_t] \} \, ds_{\boldsymbol{y}} \,. \tag{2.16}$$

Die Transformation der Grundlösung g_2 und g_3 wird grundlegend anders durchgeführt. Es werden nur die für die Differentialgleichungen der Momente und Querkraft (bzw. Kirchhoffschub) benötigten zweiten bzw. dritten Richtungsableitungen des Kerns g_p

$$g_p = \frac{1}{64\,\pi\, K} [\, r^3 (2 \ln r - \frac{1}{2})\, r_\nu] \tag{2.17}$$

zu Verfügung gestellt. Sie lauten

$$(g_p)_{,n\,,m} = \frac{r}{64\pi K} \{ r_m [r_n r_n u (12 \ln r + 7) + r_\tau r_t (4 \ln r + 1)] + r_p [(r_t r_\nu r_n r_\tau)(4 \ln r + 1)] \} \tag{2.18}$$

und

$$
\begin{aligned}
(g_p)_{,n\,,m\,,l} \;=\; & \frac{1}{64\pi K}\{r_l\, h + r_p r_q\{r_n r_\nu[12\ln r + 7] + r_\tau r_t[4\ln r + 1]\} + \\
& r_m\{(r_t r_q r_\nu + r_n r_\tau r_q)(8\ln r + 6) + r_l(12\, r_n r_\nu + 4\, r_\tau r_t)\} - \\
& r_m r_q\{(r_t r_\nu + r_n r_\tau)[4\ln r + 1]\} + \\
& r_p\{2(r_t r_q r_\tau - r_n r_q r_\nu)[4\ln r + 1] + 4\, r_l(r_t r_\nu + r_n r_\tau)\}\}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

mit der Hilfsgröße h

$$
h = r_m[r_n r_\nu(12\ln r + 7) + r_\tau r_t(4\ln r + 1)] + r_p[(r_t r_\nu + r_n r_\tau)(4\ln r + 1)]\,. \tag{2.20}
$$

Die Richtungsableitungen werden in die in Abschnitt 3.1 behandelten Gleichungen gemäß der benötigten Schnittkraft, also m_{xx} oder m_{yy}, q_x oder q_y und v_x oder v_y, eingesetzt. Die einzusetzenden Richtungsvektoren sind die Einheitsvektoren entweder in die x- oder y-Achsenrichtung.

Die Notation wurde aus [8] übernommen.

3 Verbesserung der FE-Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise zur Berechnung der verbesserten Ergebnisse im FE-Programm beschrieben.

3.1 Kirchhoff-Platte

Die Differentialgleichung für die schubstarre Platte wird nach dem Tonti-Schema, [3][13], hergeleitet. Über die Verknüpfung der drei Gleichungen für die Kinematik, das Materialverhalten und das Gleichgewicht erhält man die Plattendifferentialgleichung.

$$\begin{array}{ll} \text{Kinematik:} & \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}(w) = \boldsymbol{0} \\ \text{Material:} & \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0} \\ \text{Gleichgewicht:} & -\mathrm{div}^2\, \boldsymbol{M} = p \end{array} \tag{3.1}$$

Dabei ist $\boldsymbol{E} = [\varepsilon_{ij}]$ der Spannungstensor und $\boldsymbol{E}(\ \ )$ der Operator

$$\boldsymbol{E}(w) = \begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,xy} \\ w_{,yx} & w_{,yy} \end{bmatrix} .$$

$\boldsymbol{M} = [M_{ij}]$ ist der Momententensor und $\boldsymbol{C}[\ ]$ ist der Elastizitätstensor

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] = K\left\{(1-\nu)\,\boldsymbol{E} + \nu\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{I}\right\}.$$

Die Konstante K ist die Plattensteifigkeit

$$K = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)}$$

und vergleichbar mit der Biegesteifigkeit EI für einen Plattenstreifen der Breite $1,0\,m$. In die Plattensteifigkeit geht zusätzlich die Querdehnzahl ν ein.

Setzt man die Gleichungen von (3.1) ineinander ein, so erhält man die Plattendifferentialgleichung.

$$K(w_{,xxxx} + 2\,w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) = K\,\Delta\Delta w = p \tag{3.2}$$

Die Gleichungen für die Momente der Platte lauten

$$m_{xx} = -K(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \tag{3.3}$$

$$m_{yy} = -K(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \tag{3.4}$$

$$m_{xy} = -(1-\nu)K w_{,xy} \tag{3.5}$$

und für die Querkraft

$$q_x = -K(w_{,xxx} + w_{,yyx}) \tag{3.6}$$

$$q_y = -K(w_{,yyy} + w_{,xxy})\,. \tag{3.7}$$

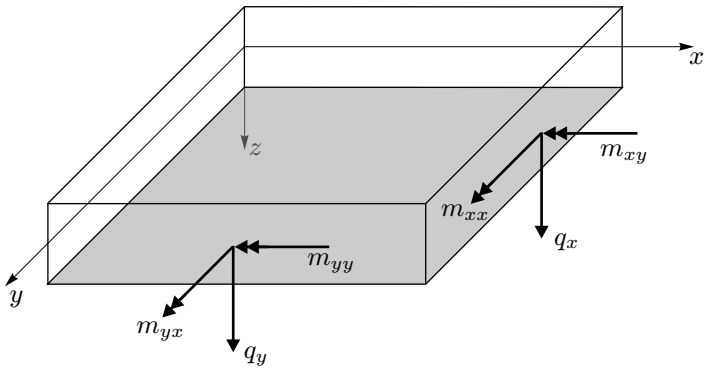

Abb. 3.1: Schnittgrößen der Schnittkanten einer Platte

Die Schnittgrößen der Platte sind in Abb. 3.1 angetragen. Ein Moment m_{xx} dreht sich um die y-Achse, ein Moment m_{yy} dreht sich um die x-Achse. Diese Konvention ist anders als man es aus der Balkenstatik gewöhnt ist. Positive m_{xx} bzw. m_{xx} Momente sind so definiert, dass sie eine Durchbiegung der Platte in Richtung der z-Achse verursachen. Bei einem positiven Moment muss die Bewehrung unten eingelegt werden. Die Momente m_{xy} und m_{yx} sind die Drillmomente einer Platte. Sie verursachen bei einer gelenkig-gelenkig gelagerten Plattenecke die abhebenden Einzelkräfte. Aus den Momenten m_{xy} und m_{yx}, zusammen mit der Querkraft q_x und q_y, wird der so genannte Kirchhoffschub v berechnet.

$$v_x = q_x + \frac{d\,m_{xy}}{d\,y} \qquad v_y = q_y + \frac{d\,m_{yx}}{d\,x}$$

In der vorher gewählten Schreibweise lauten die Gleichungen für den Kirchhoffschub

$$v_x = -K(w_{,xxx} + (2-\nu)w_{,yyx}) \qquad v_y = -K(w_{,yyy} + (2-\nu)w_{,xxy})\,. \tag{3.8}$$

Mit den Gln. (3.3) bis (3.8) stehen alle benötigten Gleichungen für die Berechnung der äquivalenten Knotenlasten für die FE-Methode zur Verfügung.

Als Randbedingungen für die Platte sind drei Hauptlagerungsarten zu nennen.

- Die frei drehbare Lagerung. Die Randbedingungen dafür lauten

  $$w = 0 \qquad \text{und} \quad m_{xx} = 0 \quad \text{oder} \quad m_{yy} = 0\,,$$

  je nach dem, ob der Rand in y- oder x-Achsenrichtung betrachtet wird.

- Die starre Einspannung. Die Randbedingungen für diese Lagerungsart lauten

  $$w = 0 \qquad \text{und} \quad w_{,x} = 0 \quad \text{oder} \quad w_{,y} = 0\,.$$

  Aus den Randbedingungen folgt, dass an starr eingespannten Rändern keine Drillmomente auftreten, $m_{xy} = 0$. Der Kirchhoffschub v ist gleich der Querkraft q.

- Der freie Plattenrand. Die Randbedingungen dieser Lagerung sind

$$m_{xx} = 0 \quad \text{oder} \quad m_{yy} = 0 \qquad \text{und} \quad v_x = 0 \quad \text{oder} \quad v_y = 0\,.$$

Das Moment normal zum Rand ist Null und die Querkraft zusammen mit der Ableitung des Drillmomentes, also der Kirchhoffschub, muss Null werden.

3.2 Das bikubische Plattenelement

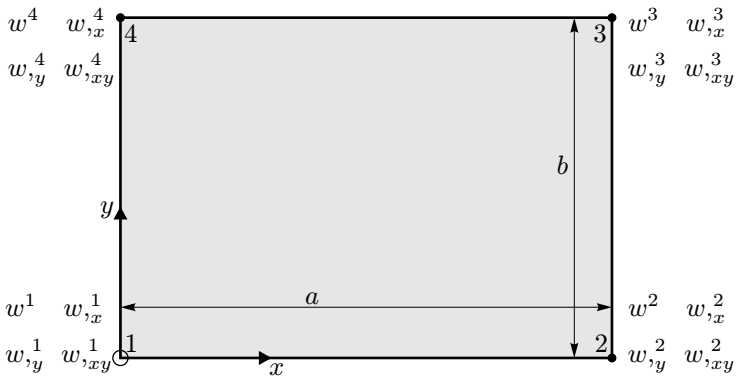

Abb. 3.2: Das R16 Plattenelement mit Knotennumerierung, Koordinatenrichtungen, Knotenfreiheitsgraden und Elementabmessungen.

Für das bestehende Finite-Element-Programm *WINFEM-P* wurde das R16 Element verwendet. Das Rechteckelement verwendet für die Durchbiegung $w(x, y)$ ein bikubisches Polynom als Ansatzfunktion.

$$\begin{aligned} w = {} & a_1 + a_2\,x + a_3\,y + a_4\,x^2 + a_5\,xy + a_6\,y^2 + a_7\,x^3 + a_8\,x^2y + a_9\,xy^2 + a_{10}\,y^3 + \\ & + a_{11}\,xy^3 + a_{12}\,x^3y + a_{13}\,x^2y^2 + a_{14}\,x^2y^3 + a_{15}\,x^3y^2 + a_{16}\,x^3y^3 \end{aligned} \tag{3.9}$$

In Vektorschreibweise lautet die Durchbiegung w

$$w = \boldsymbol{U^T}\,\boldsymbol{a} \tag{3.10}$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U^T} &= \left[\, 1\ x\ y\ x^2\ xy\ y^2\ x^3\ x^2y\ xy^2\ y^3\ xy^3\ x^3y\ x^2y^2\ x^2y^3\ x^3y^2\ x^3y^3 \,\right] \\ \boldsymbol{a^T} &= \left[\, a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16} \,\right]. \end{aligned}$$

In Abb. 3.2 ist ein solches Plattenelement mit den 16 Freiheitsgraden dargestellt. Jeder Knoten hat vier Freiheitsgrade, eine Absenkung w, zwei Verdrehungen $w,_x$ und $w,_y$ und eine Verdrillung $w,_{xy}$. Setzt man jeweils einen der Freiheitsgrade auf 1, so entstehen die

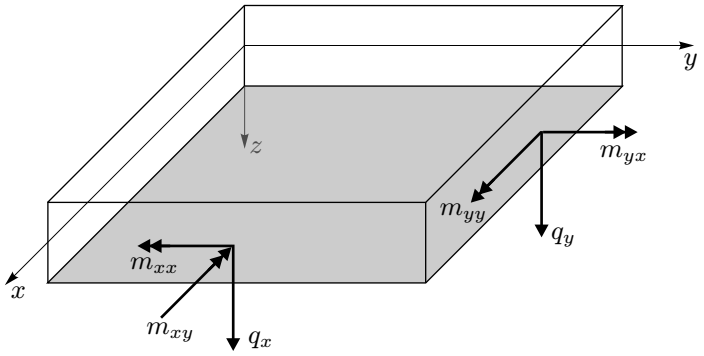

Abb. 3.3: Schnittgrößen und Koordinatenachsen des Plattenelementes

16 Einheitsverformungen des Plattenelementes, welche benötigt werden, um die äquivalenten Knotenlasten für die Einsbelastungen (Vertikallast, Moment, Knick und Versatz) zu ermitteln.

Für die 16 Freiheitsgrade wird der Vektor

$$\boldsymbol{d^T} = \begin{bmatrix} w^1 & w^1{}_{,x} & w^1{}_{,y} & w^1{}_{,xy} & \dots & w^4 & w^4{}_{,x} & w^4{}_{,y} & w^4{}_{,xy} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

eingeführt. Multipliziert man den Vektor $\boldsymbol{a}$ mit der Koordinatenmatrix $\boldsymbol{A}$ (Elemente der Koordinatenmatrix siehe [14]), so erhält man die unbekannten Verformungen $\boldsymbol{d}$,

$$\boldsymbol{d}{=}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{a}\,. \tag{3.12}$$

Multipliziert man von links mit der inversen Matrix $\boldsymbol{A^{-1}}$, so erhält man den Vektor $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{a}{=}\boldsymbol{A^{-1}}\,\boldsymbol{d}\,. \tag{3.13}$$

Einsetzen von Gl. (3.13) in Gl. (3.10) liefert die Biegefläche w. Den Vektor der Einheitsverformungen erhält man durch die Gleichung

$$\boldsymbol{\varphi}{=}\boldsymbol{U^T}\,\boldsymbol{A^{-1}}\,.$$

Die vier Einheitsverformungen des ersten Knotens sind in Abb. 3.4 dargestellt. Die erste Einheitsverformung φ_1 ist eine Absenkung des Knotens 1 um Eins in Richtung der z-Achse. Die Graphen, die in der $x\,z$- bzw. $y\,z$-Ebene entstehen, entsprechen der ersten Einheitsverformung der Balkens. φ_2 ist eine Verdrehung des Knotens 1 von 45° um die y-Achse. Diese Funktion stimmt entlang der x-Achse bis auf das Vorzeichen mit der zweiten Einheitsverformung φ_2 des Balkens überein. Für die dritte Einheitsverformung gilt das Gleiche wie für die zweite, nur das die Drehung um die x-Achse geht. Die vierte Einheitsverformung ist die Ableitung des ersten Knotens nach x und y, $w^1{}_{,xy}$. Die Fläche bildet einen 'Buckel' aus (siehe Abb. 3.4 d). Zu dieser Einheitsverformung gibt es keine Analogie zur Balkenstatik. Die Einheitsverformungen der anderen drei Knoten sehen genauso aus, nur ändern sich teilweise die Vorzeichen der Verformung.

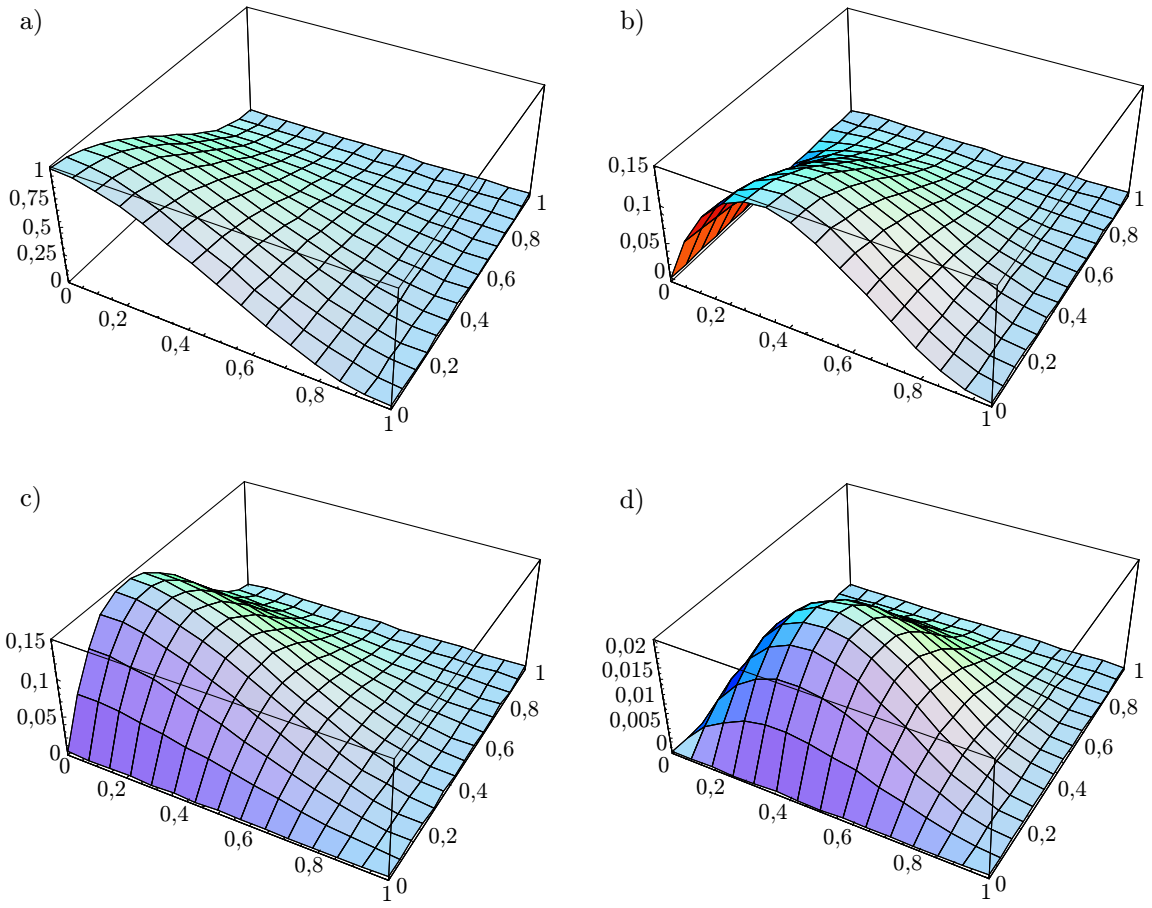

Abb. 3.4: Die vier Einheitsverformungen für den ersten Knoten. a) Absenkung um 1, b) Verdrehung um die x-Achse um '1', c) Verdrehung um die y-Achse um '1', d) Verdrillung in x und y-Achsenrichtung um '1'

3.3 Die Randkorrektur

Die Greensche Funktion wird, wie beschrieben, in eine Grundlösung und einen regulären Anteil aufgeteilt. Die Grundlösung ist für die Kirchhoffplatte bekannt und unabhängig von der Geometrie und den Lagerungsbedingungen. Der reguläre Teil der Greenschen Funktion korrigiert die Randdaten der Grundlösung so, dass die Randbedingungen, also die Lagerungsbedingungen der Platte, erfüllt werden. Dazu werden die Kraft- und Weggrößen der Grundlösung mit umgekehrten Vorzeichen als Belastung auf den Rand der Platte aufgebracht und die Biegefläche vom FE-Programm berechnet. Die ermittelte Daten der Verformung ist die reguläre Lösung u_R.

Dabei sind die drei im Plattenprogramm zur Verfügung stehenden Lagerungsarten zu unterscheiden: starre Einspannung, gelenkige Lagerung und freier Rand.

In Abb. 3.5 ist beispielhaft die Grundlösung für das Moment m_{xx} einer Platte dargestellt. Addiert man die reguläre Lösung für eine gelenkig gelagerte Platte, siehe Abb.

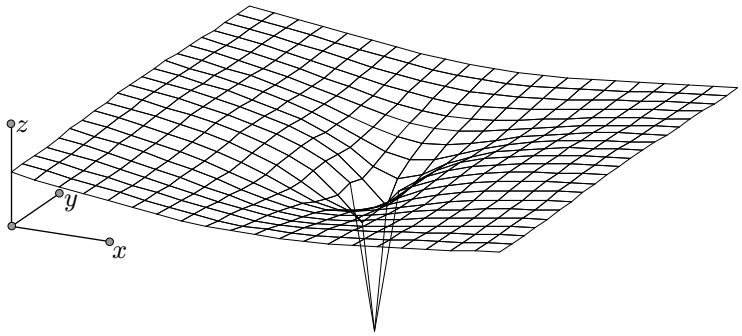

Abb. 3.5: Grundlösung für das Moment m_{xx}.

3.6, zu der Grundlösung, so sind die Randbedingungen für eine gelenkige Lagerung eingehalten. Optisch lässt sich das bei den beiden Abb. 3.5 und 3.6 gut nachvollziehen; die Verformungen in z-Richtung sind entgegengesetzt gleich groß, die Verdrehung normal zum Rand heben sich hingegen nicht gegenseitig auf.

3.3.1 Starr eingespannter Rand

Ist der Rand starr eingespannt, so sind auf dem Rand nur die Weggrößen, die beim FE-Programm gesperrt sind zu korrigieren, d.h. w, $w_{,n}$ und $w_{,xy}$, so dass die Greensche Funktion die vorgegebenen Randbedingungen einhält.

Im Programm werden die Weggrößen, g_i, $\dfrac{\partial g_i}{\partial n}$ und $g_{i,xy}$ in den Randknoten der Grundlösung berechnet und mit umgekehrten Vorzeichen als Belastung auf die Platte aufgebracht. Die ersten beiden Weggrößen wurden [5] und [8] entnommen, die Verdrillung wurde mit dem Programm *Mathematica* berechnet und in das FE-Programm implementiert.

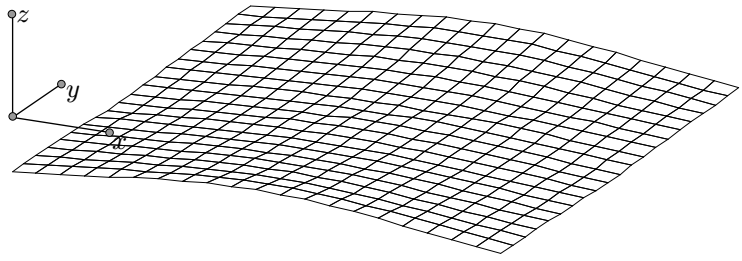

Abb. 3.6: Reguläre Lösung für das Moment m_{xx}. Der Rand der Platte ist gelenkig gelagert.

3.3.2 Gelenkig gelagerter Rand

Bei einem gelenkig gelagertem Rand sind vom FE-Programm die Verformungen w und $w_{,t}$, d.h. die Verdrehung tangential zum Rand, gesperrt. In den Ecken sind beide Verdre-

hungen $w_{,x}$ und $w_{,y}$ gesperrt. Diese Größen werden wie im vorigen Abschnitt beschrieben korrigiert.

Da bei einer gelenkigen Lagerung die Randmomente m_n und die Drillmomente m_{nt} Null sein müssen, sind die aus der Grundlösung ermittelten Randkräfte als negative Belastungen auf dem Rand aufzubringen. Dadurch wird die Grundlösung so korrigiert, dass die resultierende Biegefläche, die Greensche Funktion, die Randbedingungen erfüllt.

Da ein FE-Programm nur mit Knotenlasten rechnet, müssen die Randbelastungen als äquivalente Knotenkräfte aufgebracht werden. Die Knotenlasten werden über die Gleichung

$$f_i = \int_0^l p\,\varphi_i\,ds, \qquad 0 \le s \le l \tag{3.14}$$

berechnet. Dabei ist p die aus der Grundlösungen resultierende Randlast. Dort, wo die Ableitung $\varphi_{i,n}$ der Einheitsverformung des Plattenelemetes ungleich Null ist, leistet das Moment m_n Arbeit auf den Wegen, so dass daraus äquivalente Knotenkräfte gemäß obiger Gleichung berechnet werden können. Die Funktionen für die Einheitsverformungen des Momentes m_n lauten

$$\varphi_a^n = \frac{(l-s)^2\,(l+2\,s)}{l^3} \tag{3.15}$$

$$\varphi_b^n = \frac{s\,(l-s)^2}{l^2} \tag{3.16}$$

$$\varphi_c^n = \frac{s^2\,(3\,l-2\,s)}{l^3} \tag{3.17}$$

$$\varphi_d^n = \frac{s^2\,(s-l)}{l^2}\,. \tag{3.18}$$

Die Funktionen für das Moment m_{nt} lauten

$$\varphi_a^{nt} = \frac{6\,s\,(s-l)}{l^3} \tag{3.19}$$

$$\varphi_b^{nt} = \frac{l^2-4\,l\,s+3\,s^2}{l^2} \tag{3.20}$$

$$\varphi_c^{nt} = \frac{6\,s\,(l-s)}{l^3} \tag{3.21}$$

$$\varphi_d^{nt} = \frac{s\,(3\,s-2\,l)}{l^2}\,. \tag{3.22}$$

Die äquivalenten Knotenkräfte werden über eine 4-Punkt-Gaussintegration berechnet. Dabei werden die Werte der zu integrierenden Funktion an den Gausspunkten ausgewertet, mit einem Gewicht multipliziert und aufsummiert.

$$I = \sum_{i=0}^{4} \Psi(\xi_i) \cdot w_i \tag{3.23}$$

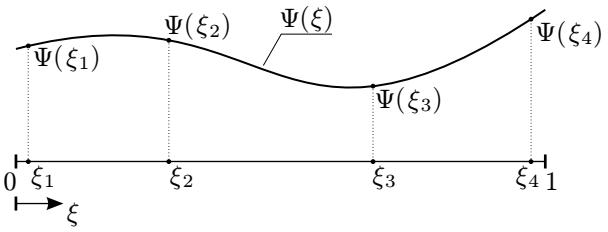

Abb. 3.7: 4-Punkt-Gaussintegration

In unserem Fall setzt sich die Funktion Ψ aus der Grundlösung und einer Einheitsverformung bzw. ihren Ableitungen zusammen. Bei der Integration ist darauf zu achten, dass sich die Gausspunkte und Gaussgewichte auf die Einheitskoordinaten beziehen (siehe Abb. 3.7), d.h. sowohl die Gausspunkte als auch die Gaussgewichte sind mit der Intervallänge zu multiplizieren. Im Folgenden sind die Gausspunkte mit den entsprechenden Gewichten aufgelistet.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0,06943184420297371 & w_1 &= 0,17392742256872704 \\ \xi_2 &= 0,33000947820757187 & w_2 &= 0,326072577431273 \\ \xi_3 &= 0,6699905217924281 & w_3 &= 0,326072577431273 \\ \xi_4 &= 0,9305681557970262 & w_4 &= 0,17392742256872704 \end{aligned}$$

Bei vier Gausspunkten wird eine Integration von Polynomen bis zur 5. Ordnung exakt ausgeführt.

3.3.3 Freier Rand

Da bei einem freien Rand die Weggrößen als Randbedingungen nicht mehr vorgegeben sind, müssen entsprechnend keine Weggrößen als Belastung aufgebracht werden. Als Randbedingungen sind die Schnittgrößen m_n und v_n vorgegeben. Bei der Greenschen Funktion müssen diese gleich Null sein. Es werden für die Randmomente wie beim gelenkig gelagerten Rand in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet und mit umgekehrten Vorzeichen als Belastung auf das System aufgebracht.

Weiter muss der Kirchhoffschub, wie oben aufgeführt, an den freien Rändern Null sein. Dazu wird der Kirchhoffschub der Grundlösung mit den folgenden Einheitsverformungen

$$\varphi_a = \frac{(l+2\,s)\cdot(l-s)^2}{l^3} \tag{3.24}$$

$$\varphi_b = \frac{s\,(l-s)^2}{l^2} \tag{3.25}$$

$$\varphi_c = \frac{s^2\,(3\,l-2\,s)}{l^3} \tag{3.26}$$

$$\varphi_d \;=\; \frac{-s^2\,(l-s)}{l^2} \tag{3.27}$$

über die Kantenlänge l gemäß Gl. (3.14) integriert und als negative Belastung aufgebracht. Der Wert des Integrals wird wieder über eine Gaussintegration ermittelt.

Die Einheitsverformungen $\varphi_a \ldots \varphi_d$ entsprechen den Einheitsverformungen des Biegebalkens (Hermite-Polynome).

3.4 Die reguläre Lösung

Die reguläre Lösung, d.h. der Korrekturterm, wird durch eine FE-Berechnung mit den im vorigen Kapitel beschriebenen aufgebrachten Randlasten (Kraft- und Weggrößen) bestimmt, siehe Abb. 3.6. Die FE-Gleichung lautet

$$\sum a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = (p, \varphi_i) \tag{3.28}$$

und ist gleichwertig mit der bekannteren Schreibweise

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad . \tag{3.29}$$

Das Gleichungssystem wird bei der Berechnung der unbekannten Kraft- und Weggrößen nach den bekannten Kraft- und Weggrößen separiert. Das bedeutet, dass bei aufbringen einer Verformung, der Eintrag der Steifigkeitsmatrix multipliziert mit der Verformung, auf die rechte Seite der Gleichung gebracht wird, um die zugehörige Kraftgröße zu bestimmen.

3.5 Berechnung der Zielgröße

Die Berechnung der Zielgröße erfolgt über die Integration der Greenschen Funktion mit der Belastung. Die Greensche Funktion wird dabei in die Grundlösung und einen regulären Anteil, die Randkorrektur, aufgeteilt. Damit ergibt sich der folgende Ausdruck

$$w_i^+(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_i^+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega g_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \cdot p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega u_R \cdot p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{3.30}$$

Das erste Integral kann in ein Randintegral umgeformt werden (siehe Kapitel 2.7), welches durch eine Gaussintegration ausgewertet wird. Die Integration wird über jedes belastete Element ausgeführt. Würde mit der im Programm gewählten Vier-Punkt-Gaussintegration immer eine exakte Integration durchgeführt, so sollte sich bei einer Netzverdichtung der Zahlenwert dieses Integrals nicht ändern. Es ist aber eher davon auszugehen, dass die Integration nicht exakt ist, da die Funktionen von höherer Ordnung sind, so dass sich der Wert mit zunehmender Netzdichte verbessert.

Da bei der Lasteingabe im Programm nur eine Gleichflächenlast je Element zulässig ist, kann der zweite Integralausdruck in Gl. (3.30) wie folgt ausgewertet werden.

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b p\, w_h(x,y)\, dx\, dy \;=\; & (a\, b\, p\, (36\, w_1 + a(-6\, w_{10} + b\, w_{12} + 6\, w_{14} - b\, w_{16} + \\ & 6\, w_2 + b\, w_4 - 6\, w_6 - b\, w_8) + 6\, (-b\, w_{11} + 6\, w_{13} - \\ & b\, w_{15} + b\, w_3 + 6\, w_5 + b\, w_7 + 6\, w_9)))/144 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dabei werden für $w_1 \ldots w_{16}$ die Knotenverformungen des Elementes eingesetzt, a und b sind die Abmessungen des Elementes und p ist die Gleichflächenlast auf dem Element.

Die Anteile der Zielgröße resultierend aus den auf die Elementkanten aufgebrachten konstanten Linienlasten werden durch Überlagerung der Greenschen Funktion mit den Linienlasten berechnet. Die Auswertung der Arbeitsintegrale, hier sind es Linienintegrale, erfolgt wieder, wie vorher beschrieben, über eine Gaussintegration.

Die aus den in Elementknoten aufgebrachten Einzellasten resultierenden Anteile der Zielgröße werden berechnet, in dem die zur Einzelkraft duale Weggröße im Knoten mit der Einzellast multipliziert und über alle Knoten aufsummiert wird.

4 Programmbeschreibung

Das im Rahmen dieser Arbeit geschriebene Programm ist ein Teil eines bestehenden FE-Programmes des Fachgebietes Baustatik der Universität Kassel. Das vorhandene Programm (*WINFEMP*) besteht aus einem *Hauptprogramm*, einem Programm, um die *Geometrie*, Lagerungsbedingungen und Materialdaten einzugeben. Ein weiteres Unterprogramm ist für die *Lasteingabe* zuständig. Das vierte Programm besteht aus dem *Rechenkern* und das letzte Programm ist auf die Darstellung der *Ergebnisse* ausgerichtet. Der Programmcode der Projektarbeit ist Bestandteil dieses Programmes.

4.1 Der logische Programmaufbau

Das Plattenprogramm wird von dem Hauptfenster aus bedient. Es können der Reihe nach die zur Berechnung von Schnitt- und Weggrößen benötigten Eingaben vorgenommen werden.

Für die spätere Berechnung muss zu erst einmal die Platte mit Angaben über das Material (E-Modul und Querdehnzahl ν), Dicke h der Platte und Anzahl und Abmessungen der Elemente eingegeben werden. Die Lagerungsbedingungen, mit Federn und elastischer Bettung, sind ebenfalls in diesem Teilprogramm einzugeben.

Der nächste Schritt ist die Eingabe der Belastung. Man hat die Möglichkeit Flächenlasten, Kanten- und Knotenlasten in Form von Kraft- und Weggrößen einzugeben.

Nach der Lasteingabe werden die unbekannten Kraft- bzw. Weggrößen vom Rechenprogramm bestimmt. Die Ergebnisse können im letzten Programm visuell und in Tabellenform betrachtet werden.

4.2 Verbesserung von Punktwerten

Über den Menuebefehl *Recovery* im Programmteil für die Darstellung der Ergebnisse gelangt man zu dem in Abb. 4.1 dargestellten Dialogfenster. Um die *Recovery*-Funktion sinnvoll nutzen zu können, muss eine FE-Berechnung des aktuellen Lastfalls vorausgegangen sein. In dem Dialogfenster hat der Benutzer die Möglichkeit die Koordinaten des Punktes einzugeben, für den eine Kraft- oder Weggröße verbessert werden soll. Im mittleren Teil des Fensters kann die Zielgröße ausgewählt werden. Derzeit stehen die Weggrößen w und $w_{,n}$ und die Kraftgrößen m_n, v_n und q_n zu Verfügung. In der Praxis wird grundsätzlich mit der Querkraft gearbeitet, da aber der Kirchhoffschub das Äquivalent zur Querkraft beim Balken ist, wurden beide Kraftgrößen in das Programm implementiert.

Mit der Schaltfläche *Einstellungen* gelangt man zu dem in Abb. 4.2 dargestellten Dialogfenster. Standardmäßig sind die Einstellungen "ohne Randintegral" und "1. Ori-

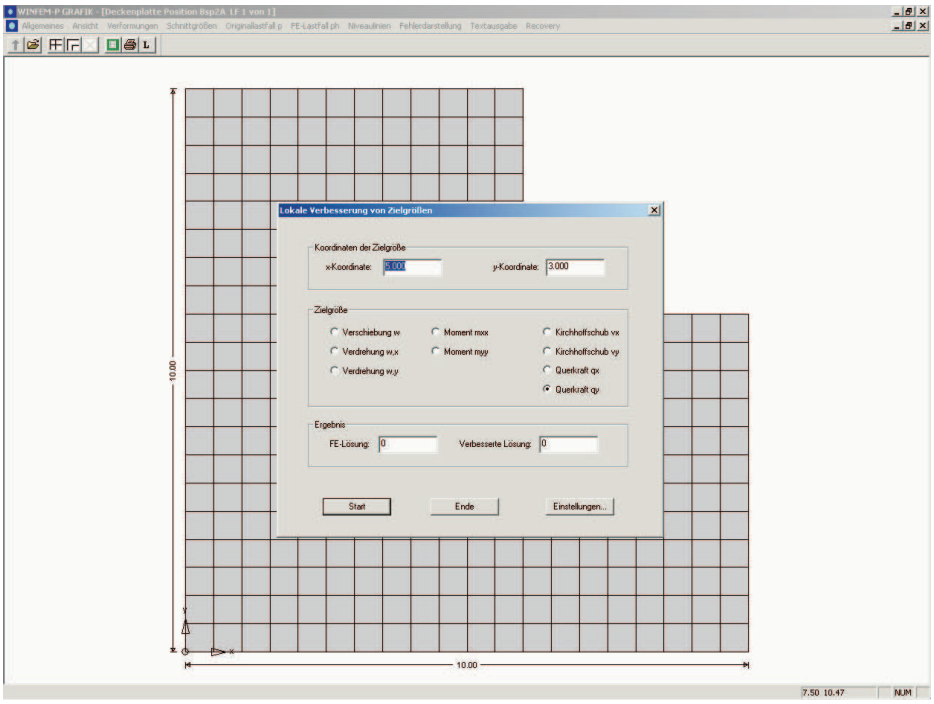

Abb. 4.1: Programmteil *Ergebnisse* mit Dialogfenster für die Berechnung eines verbesserten Punktwertes.

ginalproblem" festgelegt. Dabei wird der Punktwert an der ausgewählten Stelle durch die in dieser Projektarbeit behandelten Methode berechnet. Bei dem Programm *WINFEMS*, dem Scheibenprogramm, wurde eine Wahlmöglichkeit für die Berechnung mit und ohne Berücksichtigung des Randintegrals eingebaut. Die Berechnung bei der Berücksichtigung des Randintegrals (Funktion auf dem gelagerten Rand zwischen den Knoten ungleich Null) brachte nur eine unwesentliche Veränderung der Lösung. Daher wurde auf diese Wahlmöglichkeit im Plattenprogramm verzichtet.

Auf der rechten Seite der Dialogbox können Einstellungen für die Darstellung der Biegefläche vorgenommen werden. So kann z.B. unter 2. die verbesserte Einflussfunktion berechnet und angezeigt werden. Die Punkte 2. – 4. haben zur Folge, dass kein verbesserter Punktwert mehr berechnet wird, da hier nur die Verformungswerte für die Darstellung berechnet werden. Für eine erneute Berechnung einer Zielgröße muss der Lastfall neu eingegeben werden, die FE-Berechnung durchgeführt und die *Recovery*-Funktion erneut aufgerufen werden.

Wurden alle Einstellungen vorgenommen, wird die Berechnung mit Betätigen des Buttons *START* gestartet. Für das zu berechnende Beispiel werden die Randlasten (Schnittgrößen und/oder Weggrößen) aus der Grundlösung berechnet und als Belastungen auf die Platte aufgebracht. Mit dieser Randbelastung wird eine FE-Berechnung durchgeführt und anschließend die Integration (numerisch und analytisch) über die Plat-

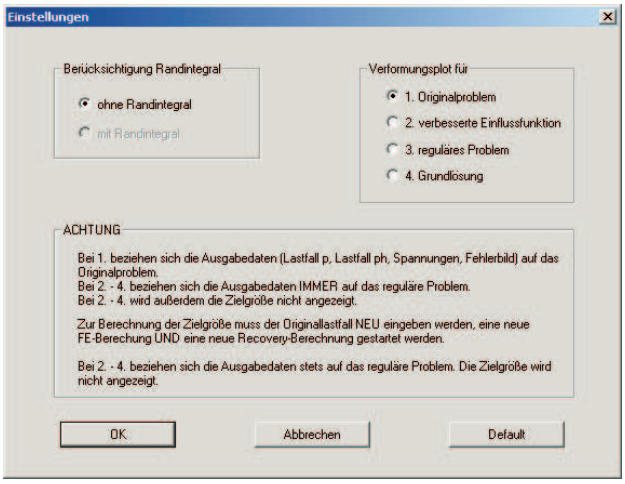

Abb. 4.2: Einstellungsmöglichkeiten für die Darstellung der Biegefläche.

te zur Berechnung der Zielgröße vorgenommen.

Im Programm selbst werden die aktuellen FE-Werte zwischengespeichert, denn diese werden während der Berechnung der Zielgröße überschrieben. Anschließend, nachdem die Zielgröße bestimmt wurde, werden die zwischengespeicherten Weg- und Kraftgrößen wieder als die "normalen" Daten dem Programm zu Verfügung gestellt.

5 Numerische Ergebnisse

Anhand von ausgewählten Beispielen soll die Verbesserung der FE-Ergebnisse dargestellt werden. Die Ergebnisse werden mit bekannten Reihenlösungen (Czerny-Tafeln), mit Randelementeberechnungen und mit der herkömmlichen FE-Berechnung verglichen. Die Einträge der Czerny-Tafeln werden beim Vergleich von einer Rechteckplatten mit einer Gleichflächenlast herangezogen. Für eine andere Geometrie (L-Platte) und Lastfälle wird das Ergebnis des Randelementeprogrammes *BE-PLATTE* als quasi-exakte Lösung herangezogen. Als Eingabedaten für die Platte wird immer eine Querdehnzahl von $\nu = 0$, ein E-Modul von $E = 3 \cdot 10^7\, kN/m^2$ und eine Plattendicke von $t = 0,20\, m$ angenommen.

5.1 Gelenkig gelagerte Rechteckplatte

Die Platte mit ihren Abmessungen und dem gewählten Punkt ist in Abb. 5.1 a dargestellt. Die Platte wird mit einer Gleichflächenlast von $10\, kN/m^2$ belastet. Die Achsen wurden gemäß der Definition der Czerny-Tafel eingeführt, so dass die Bezeichnungen der Schnittgrößen identisch sind.

Ein "direkter" Vergleich mit der Reihenlösung ist in sofern nicht möglich, als dass die Werte in den Tafeln nur mit einer Nachkommastelle angegeben sind. Daher wurde der Randelementewert bei einer großen Anzahl von Randelementen als Referenzwert angenommen. Ein "direkter" Vergleich ist auch hier schwierig, da die Anzahl der Nachkommastellen der FE-Berechnung die der RE-Berechnung deutlich übersteigt.

Untersucht wurde das Konvergenzverhalten der Momente m_{xx} und m_{yy}. Aus den Czerny-Tafeln berechnet sich das Moment m_{xx} zu

$$m_{xx} = \frac{10 \cdot 5^2}{10,4} = 24,04\, kNm/m\,.$$

Für das Moment m_{yy} lässt sich mit den Czerny-Tafeln nur der Maximalwert berechnen. Da aber der Plattenmittelpunkt für die Verbesserung der Schnittgrößen gewählt wurde, kann die Reihenlösung nicht als Vergleichswert herangezogen werden. Die Berechnung

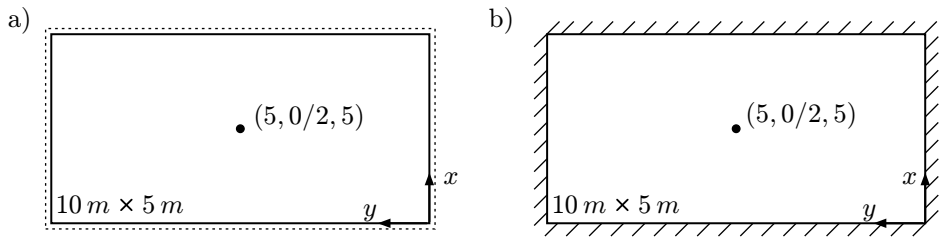

Abb. 5.1: a) Rundum gelenkig gelagerte Rechteckplatte, b) rundum eingespannte Rechteckplatte.

Tab. 5.1: Ergebnisse der FEM und FEM$^+$-Berechnung bei gelenkig gelagertem Rand.

	m_{xx}		m_{yy}	
Freiheitsgrade	FEM	FEM$^+$	FEM	FEM$^+$
16	29,480838	26,376989	-	-
32	28,250274	24,152956	4,094006	4,149122
64	25,074947	24,129319	4,097803	4,242599
80	25,076282	24,108591	4,275944	4,347651
320	24,350571	24,117905	4,302926	4,358041
512	24,350399	24,122837	4,333204	4,355279
640	24,350693	24,123957	4,340407	4,355772
800	24,265222	24,123224	4,340329	4,355501
1600	24,152297	24,122672	4,340321	4,354315

der Werte für beide Schnittgrößen mit dem Randelementeprogramm ergibt für

$$m_{xx} = 24,11\,kNm/m \qquad \text{und} \qquad m_{yy} = 4,35\,kNm/m\,.$$

Die Ergebnisse der FEM und FEM$^+$-Berechnung sind in Tab. 5.1 festgehalten. Um überhaupt eine Vergleichbarkeit der FE-Ergebnisse untereinander herstellen zu können, wurde darauf geachtet, dass der ausgewählte Punkt (Plattenmitte) immer in einem Knoten lag. Die Knotenwerte sind die aus vier Elementen gemittelten Werte. Würde der betrachtete Punkt mal in einem Element und mal in einem Knoten liegen, so würde sich ein zusätzlicher Fehler in den Ergebnissen niederschlagen, der die Aussage der hier gewonnenen Ergebnisse verfälschen könnte.

Aus den Berechnungsdaten ist ein deutlich schnelleres Annähern der FEM$^+$-Berechnung an den quasi-exakten Wert der Randelementberechnung gegenüber der normalen FE-Methode festzustellen. Die Fehlerdarstellung beider Schnittmomente (siehe Abb. 5.2) bestätigt dieses Konvergenzverhalten.

Der Fehler der normalen FE-Berechnung verringert sich im doppeltlogarithmischen Maßstab bei zunehmender Anzahl der Elemente annähernd linear. Dies ist auch so zu erwarten, da die FE-Methode bei immer feiner werdender Diskretisierung asymptotisch gegen die exakte Lösung strebt.

5.2 Eingespannte Rechteckplatte

Die gleiche Platte wurde mit einer eingespannten Randlagerung untersucht. In dem Fall dieser Randlagerung liefern die Czerny-Tafel für das Moment m_{xx} den exakten Wert von

$$m_{xx} = \frac{10 \cdot 5^2}{25} = 10,00\,kNm/m\,.$$

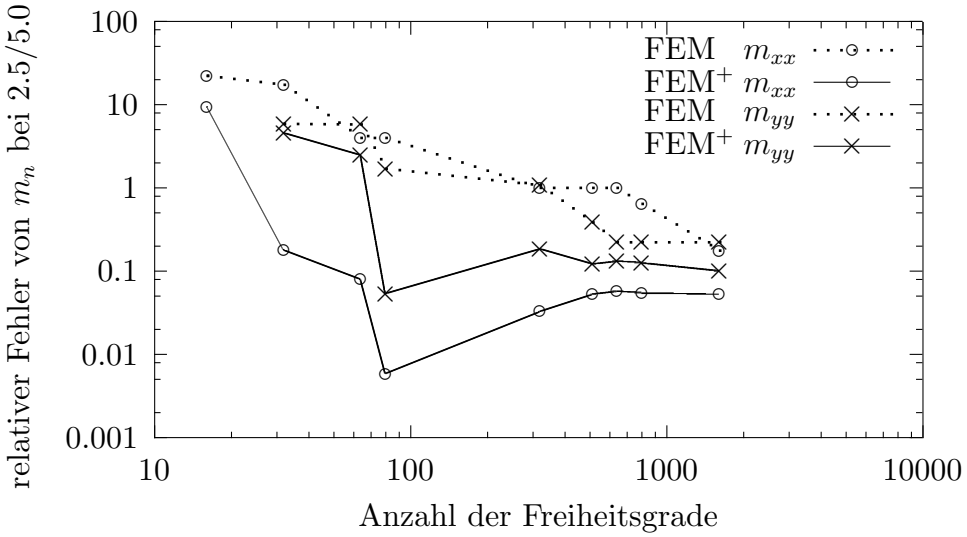

Abb. 5.2: Verbesserung der Schnittkraft m_n mit gelenkig gelagertem Rand.

Dieses Ergebnis ist deckungsgleich mit der RE-Berechnung. Für den m_{yy}-Momentenwert in der Mitte der Platte liefern die Czerny-Tafeln wieder keinen Wert, so dass hier das Ergebnis der Randelemetmethode bei einer großen Anzahl an Randelementen als quasi-exakte Lösung angenommen wurde. Die RE-Berechnung ergab

$$m_{yy} = 0,95\,kNm/m\,.$$

Die Ergebnisse der FEM- und FEM$^+$-Berechnung sind in Tab. 5.2 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die verbesserte FE-Berechnung schon bei einer Anzahl von 48 Freiheitsgraden die als exakt angenommenen Wert erreicht, während die Werte der konventionellen FE-Berechnung erst bei einer Einteilung der Platte in 1444 Freiheitsgrade nahe an der exakten Lösung sind.

Bestätigt werden die aus der Tab. 5.2 abgeleiteten Aussagen durch die in Abb. 5.3 gezeigte Fehlerdarstellung der FEM- und FEM$^+$-Ergebnisse. Das Konvergenzverhalten der FEM-Berechnung ist, wie bei der gelenkigen Lagerung auch, im doppeltlogarithmischen Maßstab linear. Das Konvergenzverhalten der FEM$^+$-Berechnung unterscheidet sich hingegen von dem mit einer gelenkigen Randlagerung deutlich. Ab einer Anzahl von 48 Freiheitsgraden ändert sich der Fehler für das Moment m_{xx} nur noch unwesentlich. Es ist ein Ergebnis erreicht, dass nicht mehr verbessert werden kann. Ähnlich verhält es sich mit dem Moment m_{yy}. Hier ist anzunehmen, dass ab einer Netzwahl mit 252 Freiheitsgraden ein "exaktes" Ergebnis erreicht ist.

Tab. 5.2: Ergebnisse der FEM und FEM$^+$-Berechnung bei eingespanntem Rand.

	m_{xx}		m_{yy}	
Freiheitsgrade	FEM	FEM$^+$	FEM	FEM$^+$
4	17,183818	12,598295	4,295954	-4,637915
12	15,154182	10,25017	0,724229	0,535601
36	11,202794	10,268279	0,749559	0,564891
48	11,228843	10,002786	0,879389	0,95015
252	10,303861	10,003232	0,903445	0,951548
420	10,304845	10,003327	0,93203	0,951061
532	10,304991	10,003482	0,938834	0,951124
684	10,195944	10,003401	0,938761	0,951014
1444	10,051367	10,003427	0,938712	0,951013
1624	9,960789	10,003533	0,945475	0,951064

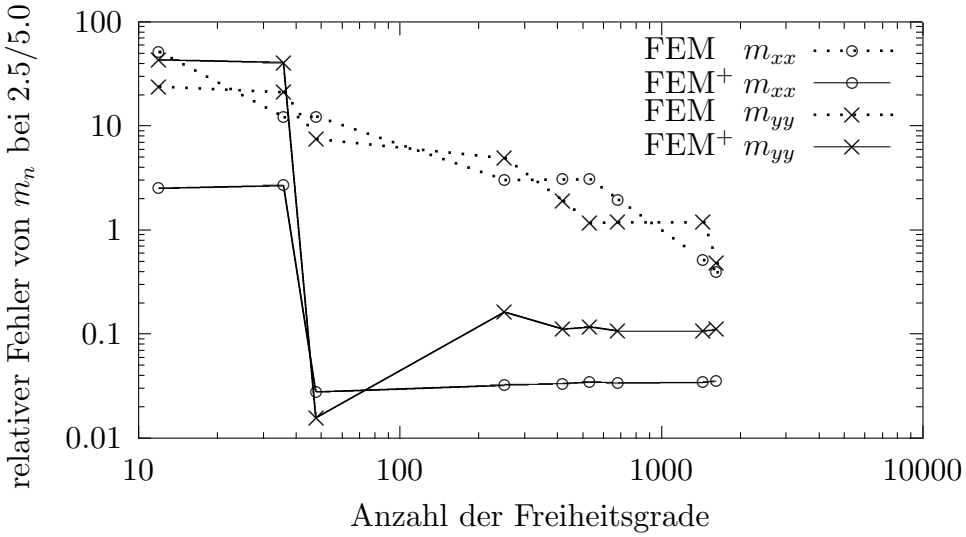

Abb. 5.3: Verbesserung der Test Schnittkraft m_n mit eingespanntem Rand.

Tab. 5.3: Ergebnisse der FEM und FEM$^+$-Berechnung bei einer L-Platte.

	m_{xx}		m_{yy}	
Freiheitsgrade	FEM	FEM$^+$	FEM	FEM$^+$
20	4,07918	1,834711	11,602142	7,347807
132	2,21245	1,951638	8,212724	7,345118
644	1,953587	1,900002	7,584625	7,376681
1044	1,923212	1,889645	7,515642	7,383099

5.3 L-Platte

Als weiteres Beispiel diente eine L-Platte mit den in Abb. 5.4 dargestellten Maßen. Die Platte ist mit einer Gleichflächenlast von $p = 10\,kN/m^2$ belastet. In dem Punkt $P(x = 7,5/y = 2,5)$ wurde das Konvergenzverhalten der Schnittkräfte m_{xx} und m_{yy} bei einer uniformen Netzverdichtung untersucht. Das Netz wurde wieder jeweils so gewählt, dass der Aufpunkt immer mit einem Knotenpunkt übereinstimmte. Die Zahlenwerte dieser Berechnung sind in Tab. 5.3 dargestellt.

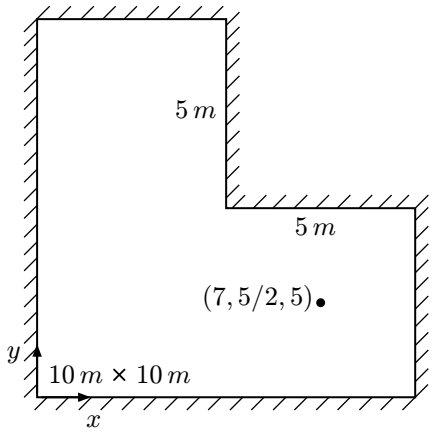

Abb. 5.4: L-Platte mit einer Gleichstreckenlast von $p = 10\,kN/m^2$.

Die Schwierigkeit bei diesem System war, einen quasi-exakten Wert als Bezugswert für die Fehlerrechnung zu ermitteln. Die Ergebnisse des Randelemente-Programmes *BE-Platte* waren deutlich abhängig von der Anzahl der gewählten Randelemente. Da bei zunehmender Verfeinerung des Randes sich die Ergebnisse der FEM$^+$-Berechnung annäherten, wurde ein "Mittelwert" aus beiden Berechnungsmethoden als quasi-exakter Wert angenommen. Für m_{xx} und m_{yy} wurden die folgenden Werte festgesetzt:

$$m_{xx} = 1,88\,kNm/m \qquad \text{und} \qquad m_{yy} = 7,39\,kNm/m\,.$$

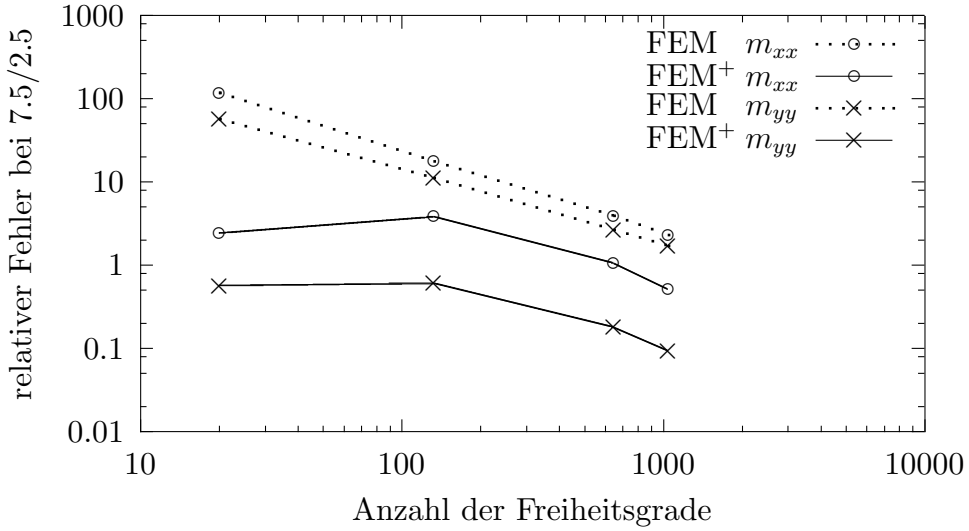

Abb. 5.5: Verbesserung der Schnittkraft m_{xx} und m_{yy} mit eingespannten Rand.

Aus Tab. 5.3 ist zu erkennen, dass die FEM$^+$-Berechnung schon bei einer geringen Netzdichte, die exakten Werte erreicht. Für eine praktische Anwendung könnte man die mit 20 Freiheitsgraden ermittelten Werte verwenden. Die Ergebnisse verändern sich mit zunehmender Netzverdichtung nur unwesentlich. Bei der FEM-Berechnung hingegen ist bei einer zunehemenden Anzahl der Elemente eine Verbesserung der Ergebnisse festzustellen.

Auch hier ist aus der Fehlerdarstellung (siehe Abb. 5.5) wieder deutlich herauszulesen, dass die FEM$^+$-Werte schon bei einer geringen Anzahl an Freiheitsgraden deutlich bessere Ergebnisse liefert als die FE-Methode. Der Fehler der FE-Berechnung liegt am Anfang noch bei 60 bzw. 110%, während die FEM$^+$-Berechnung mit einem Fehler von 0,6 bzw. 2,5% startet. Die FE-Methode zeigt auch hier wieder einen linearen Verlauf der Fehlerkurve. Daher ist zu erwarten, dass die FE-Berechnung bei einer genügend hohen Anzahl an Freiheitsgraden den exakten Wert erreicht. Das Konvergenzverhalten der FEM$^+$-Berechnung ist wesentlich besser als das der FEM-Berechnung.

Auffällig bei dieser Plattengeometrie und Lagerung ist, dass die FEM$^+$-Berechnung schon bei einer sehr geringen Elementanzahl sehr gute Ergebnisse liefert, sich die Werte zunächst bei 132 Freiheitsgraden, wenn auch geringfügig, verschlechtern, dann aber, wie bei der FEM-Berechnung, sich der Fehler wieder stetig verringert.

5.4 Quadratplatte mit Einzellast

Im letzten Beispiel soll eine Quadratplatte, siehe Abb. 5.6, unter Einzellast untersucht werden. Die Zielgröße wird an einem Punkt nahe der Einzellasteinleitung berechnet. Die

Platte ist rundum gelenkig gelagert.

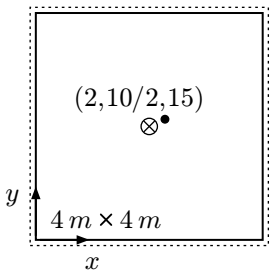

Abb. 5.6: Quadratplatte mit einer Einzellast von $P = 100\,kN$ in Plattenmitte.

Bei diesem System war es nicht mehr möglich, den Punkt an dem die Zielgröße berechnet wird, in einem Knoten zu fixieren. Der Aufpunkt liegt immer im Element, dabei verändert er aber bei der Netzverdichtung seine relative Lage im Element, was zu einer Vermischung der Fehler, die die Ergebnisse beeinflussen, führen kann. Es ist anzunehmen, dass der Graph der FEM-Berechnung in der Fehlerdarstellung nicht mehr linear sein wird.

Tab. 5.4: Ergebnisse der FEM und FEM$^+$-Berechnung bei einer Quadratplatte unter einer Einzellast.

	m_{xx}		m_{yy}	
Freiheitsgrade	FEM	FEM$^+$	FEM	FEM$^+$
16	14,128016	21,124466	13,738776	18,101956
64	18,408682	21,267214	17,609391	18,237764
256	20,984458	21,28349	19,57419	18,253965
1024	21,237736	21,279502	18,796007	18,249973
1600	21,189079	21,27776	18,240711	18,248134

Als Vergleichswerte wurden die Ergebnisse der RE-Berechnung zugrunde gelegt. Es wurden folgende Werte ermittelt.

$$m_{xx} = 21,267\,kNm/m \qquad \text{und} \qquad m = 18,239\,kNm/m$$

Die Ergebnisse der FEM- und FEM$^+$-Berechnung sind in Tab. 5.4 festgehalten. Die Fehler der Ergebnisse sind in Abb. 5.7 dargestellt.

Die Werte der FEM$^+$-Berechnung konvergieren deutlich schneller gegen den als exakt angenommenen Wert als die der FEM-Berechnung. In Abb. 5.7 ist zu erkennen, dass die Abweichungen bei beiden Berechnungsmethoden starke Schwankungen aufweisen. Dies ist durch das oben beschriebene Problem zu erklären. Es gilt allerdings auch hier, dass

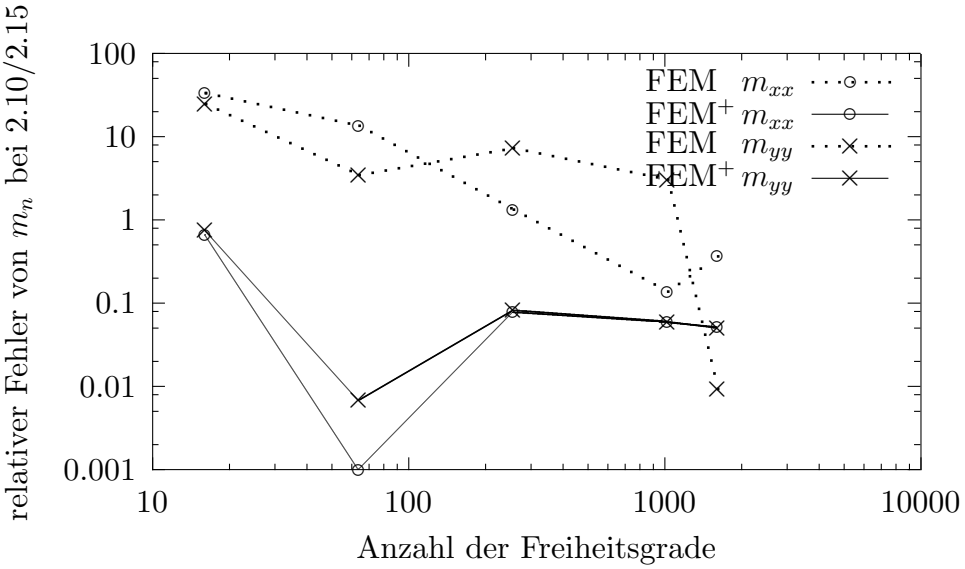

Abb. 5.7: Verbesserung der Schnittkraft m_{xx} und m_{yy} bei einer Quadratplatte mit gelenkig gelagertem Rand und einer Einzellast in Plattenmitte.

der Fehler der FEM$^+$-Berechnung schon bei einer niedrigen Netzdichte deutlich geringer ist (<1%) als bei der konventionellen FE-Berechnung ($\sim$ 30%).

Das der letzte Wert der FE-Berechnung für das Moment m_{yy} einen geringeren Fehler aufweist als die FEM$^+$-Berechnung kann nicht erklärt werden. Der Wert kann bei diesem Kurvenverlauf als Ausreißer gewertet werden.

5.4.1 Betrachtung der Querkraft q_n

Es wurde weiter die Konvergenz der Querkraft q_n an dem in Abb. 5.6 gezeigten Punkt für beide Berechnungsmethoden untersucht. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.5 dargestellt. Auffallend ist, dass sich die Werte der FEM$^+$-Berechnung bei einer Netzverdichtung nur ab der dritten Nachkommastellen verändern. Die Ergebnisse sind offensichtlich schon

Tab. 5.5: Ergebnisse der FEM und FEM$^+$-Berechnung bei einer Quadratplatte unter einer Einzellast für die Querkraft q_n.

	q_x		q_y	
Freiheitsgrade	FEM	FEM$^+$	FEM	FEM$^+$
16	-10,776185	-48,966767	-11,561942	-73,455385
64	-23,896319	-48,96892	-26,447571	-73,455806
256	-46,24749	-48,969045	-56,018115	-73,455831
1024	-53,108835	-48,969034	-91,191991	-73,455829

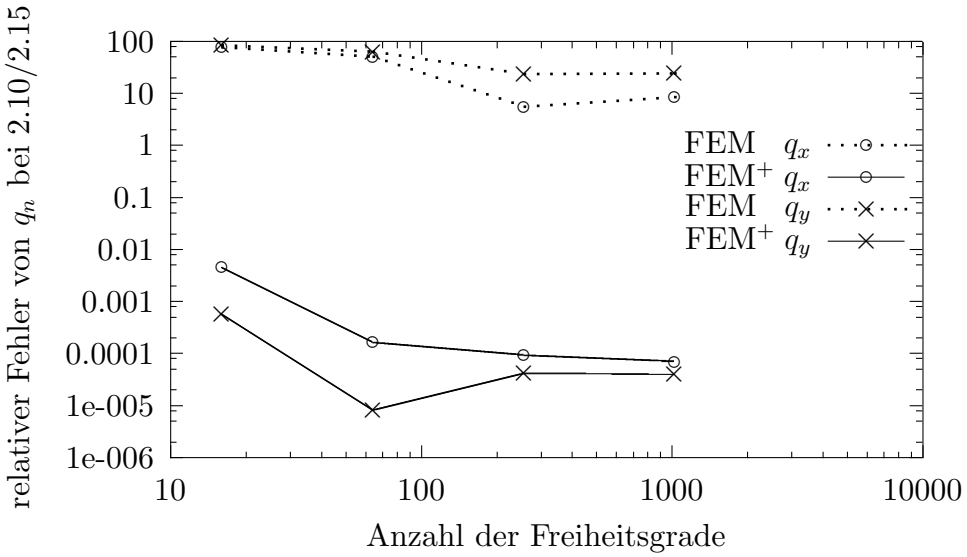

Abb. 5.8: Verbesserung der Schnittkraft q_x und q_y bei einer Quadratplatte mit gelenkig gelagertem Rand und einer Einzellast in Plattenmitte.

bei einer geringen Anzahl an Freiheitsgraden sehr Dicht an dem exakten Wert.

Mit dem Randelementeprogramm konnte der mit der FEM$^+$-Berechnung ermittelte Wert bestätigt werden. Das bedeutet, dass die FEM$^+$-Berechnung mit einer sehr geringe Anzahl an Freiheitsgraden einen quasi-exakten Wert liefert. Es wird versucht zu erklären, warum das mit der Berechnungsmethode möglich ist.

Betrachtet man die Grundlösung der Querkraft für den gegebenen Fall, so ist festzustellen, dass die Funktion im Aufpunkt einen Sprung von '1' (Die Integration um den Punkt liefert die Eins.) hat, die Lagerbedingungen am Rand nur geringfügig verletzt werden. Die reguläre Lösung muss nur kleine Korrekturem am Rand vornehmen, die auf den Lasteinleitungspunkt nur geringe Auswirkungen haben. So hat die Grundlösung in Plattenmitte eine Durchbiegung von $w = -0,489707$, die reguläre Lösung hat mit 64 Freiheitsgraden einen Wert von $w_R = 0.000018$. Die beiden Werte addiert und mit der Kraft $P = 100$ multipliziert ergibt gerade die Querkraft q_x an der Stelle $x = 2,10\,m / y = 2,15\,m$.

Aufgrund dieser Überlegung wurden folgende Werte als quasi-exakt angenommen.

$$q_x = -48,969\,kN/m \qquad \text{und} \qquad q_y = -73,4558\,kN/m$$

Die Fehlerabweichung ist in Abb. 5.8 dargestellt. Hier wird besonders deutlich, dass die FEM$^+$-Berechnung weit genauer ist als die normale FEM-Berechnung. Der Fehler der verbesserten FE-Methode liegt im vernachlässigbaren Bereich, während die FE-Methode bei einer dichten Netzstruktur im Bereich von 25% liegt.

Der Fall, dass der Aufpunkt direkt neben der Einzellasteinleitung liegt, ist für die

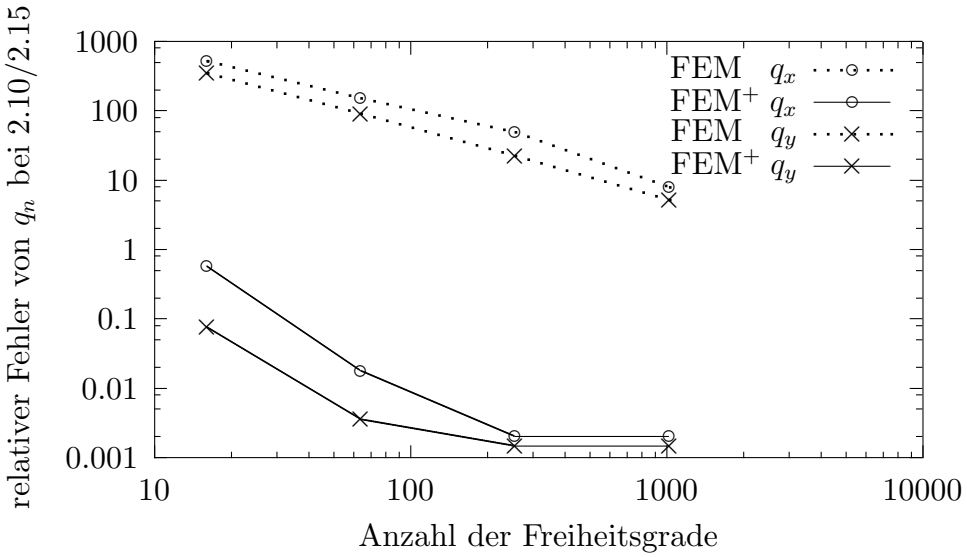

Abb. 5.9: Verbesserung der Schnittkraft q_x und q_y bei einer Quadratplatte mit gelenkig gelagertem Rand unter Gleichlast.

FEM$^+$-Berechnung der günstigste Fall. Daher wird im Folgenden der Lastfall Gleichflächenlast untersucht. Die Werte der FE-Berechnung sollten besser werden und die Werte der FEM$^+$-Berechnung etwas dichter an die der FE-Berechnung heran rücken.

Gleichflächenlast Als abschließendes Beispiel wurde an der Quadratplatte der Lastfall 'Gleichlast' mit $p = 10\,kN/m^2$ untersucht. Die Werte der Berechnung sind in Tab. 5.6 dargestellt.

Als quasi-exakte Lösung wurde wieder, wie im vorigen Beispiel, die Werte der FEM$^+$-Berechnung angenommen. Die Werte wurden durch eine RE-Berechnung bestätigt.

Auch bei diesem Beispiel ist aus den berechneten Werten zu erkennen, dass die FEM$^+$-Berechnung schon bei wenigen Freiheitsgraden nahezu exakte Ergebnisse liefert.

Tab. 5.6: Ergebnisse der FEM und FEM$^+$-Berechnung bei einer Quadratplatte unter Gleichflächenlast für die Querkraft q_n.

	q_x		q_y	
Freiheitsgrade	FEM	FEM$^+$	FEM	FEM$^+$
16	-3,077873	-0,494514	-3,328399	-0,748931
64	-1,246842	-0,4973	-1,435382	-0,749472
256	-0,739578	-0,49738	-0,916766	-0,749488
1024	-0,536129	-0,49738	-0,711004	-0,749488

Die Werte der FEM-Berechnung nähern sich in dem Fall der Gleichflächenlast stetig an die exakte Lösung an. Der Verlauf der Fehlerdarstellung bei doppeltlogarithmischen Maßstab ist linear. Das gegenüber einer Einzellast deutlich bessere Konvergenzverhalten der FEM-Werte bei einer Gleichflächenlast wird aus der Fehlerdarstellung (siehe Abb. 5.9) deutlich. Allerdings ist auch hier die FEM$^+$-Berechnung wesentlich genauer als die FE-Berechnung.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden die Grundlagen zur verbesserten Berechnung von lokalen Zielgrößen hergeleitet. Dabei wurde insbesondere auf die Konstruktion der Greenschen Funktion und die numerische Umsetzung der neuen Methode in ein bestehendes Programm eingegangen.

Durch eine vielzahl von Beispielen konnte die Verbesserung der FE-Ergebnisse belegt werden. Es wurde gezeigt, dass gerade bei einer geringen Zahl an Freiheitsgraden die FEM$^+$-Berechnung einen deutlich höheren Genauigkeitsgrad aufweist als die herkömmliche FE-Methode.

Wird der Aufpunkt der Zielgröße bei einer uniformen Netzverdichtung immer in eine Knoten gelegt, so zeigt die FE-Methode bei doppeltlogarithmischen Maßstab ein lineares Konvergenzverhalten. Die FEM$^+$-Berechnung strebt deutlich schneller gegen die exakte Lösung als die FEM-Berechnung. Liegt der Aufpunkt nicht in einem Knoten, so kann auch hier eine lineares Konvergieren der FE-Berechnung festgestellt werden.

Je dichter man mit dem Aufpunkt an einen gelagerten Rand der Platte kommt, desto ungenauer werden die Ergebnisse. Die Ergebnisse werde allerdings erst unbrauchbar, wenn man sehr dicht am Rand den Aufpunkt setzt. Eine Berechnung von Auflagerkräften mit der FEM$^+$-Methode ist mit dieser Programmversion nicht möglich.

Bei einer uniformen Netzverfeinerung tritt das Problem auf, dass der Aufpunkt mal in einem Knoten und mal im Element liegt. Die Genauigkeit der FE-Ergebnisse sind davon abhängig, ob der Aufpunkt in einem Knoten liegt (dort wird der Wert über vier Elemente gemittelt) oder in einem Element (hier wird der Wert über die 16 Knotenverformungen des Elementes bestimmt). Um diese Schwankung auszuschalten, wurde bei den meisten Beispielen darauf geachtet, dass der Aufpunkt in einem Knoten lag.

Eine Möglichkeit diese Unterschiede in der Berechnung zu umgehen wäre z.B. dem FE-Programm eine obere Grenze für die Anzahl an Freiheitsgraden anzugeben und das FE-Programm über einen Fehlerindikator das Netz automatisch generieren zu lassen. Dabei wäre der Punkt für die gewünschte Zielgröße immer in einem Knotenpunkt.

Bei der neu entwickelten FEM$^+$-Berechnung wird auch deutlich, dass es nicht alleine ausreichend ist, die Greensche Funktion dort zu verbessern, wo die Sprungbedingung, also der Knick oder der Sprung von '1', Probleme bereitet, sondern auch an den Rändern der Platte. Auch dort können aufgrund der Geometrie größere Fehler auftreten, die man durch eine gezielte Netzverdichtung verringern könnte.

Zu untersuchen wäre noch, wie sich die verbesserte FE-Berechnung (FEM$^+$) bei einer adaptiven Netzverdichtung (h-Adaption) gegenüber der herkömmlichen FE-Methode, ebenfalls mit adaptiver Netzverdichtung, verhält.

Literatur

[1] Erlenkötter, H.: *C++ Objektorientiertes Programmieren von Anfang an.* Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2001.

[2] Gaul, L., Fiedler, C.: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik.* Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1997.

[3] Grätsch, T.: *L_2-Statik.* Dissertation Universität Kassel, 2002.

[4] Gurewich, N., Gurewich, O.: *Visual C++ 4 in 21 Tagen.* Markt&Technik Buch- und Software-Verlag GmbH, Haar, 1996.

[5] Knöpke, B.: *Hypersinguläre Integralgleichungen in der kirchhoffschen Plattentheorie.* Dissertation Universität Kassel, 1996.

[6] Lorenz, P., Poterasu, V., Mihalache, N.: *Methode der Finiten Elemente und der Randelemente.* Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1995.

[7] Hartmann, F., Katz, C.: *Statik mit finiten Elementen.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[8] Hartmann, F.: *Methode der Randelemente.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[9] Hartmann, F.: *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[10] Kalik, K., Kolbe, W., Steinbach, O., Wendland, W. L.: *Mathematik.* In Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Bd. Mathematik Technische Mechanik. Ernst&Sohn, Berlin, 1999, Seiten 1-315.

[11] Krätzig, W. B., Wittek, U., Harte, R., Meskouris, K.: *Tragwerke 1.* Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1999.

[12] Schwarz, H. R. : *Methode der finiten Elemente.* Teubner-Verlag, 1991.

[13] Stein, E., Barthold, F.-J.: *Elastizitätstheorie.* In Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Bd. Werkstoffe Elastizitätstheorie. Ernst&Sohn, Berlin, 1996, Seiten 165-428.

[14] Thieme, D.: *Einführung in die Finite-Elemente-Methode für Bauingenieure.* Verlag für Bauwesen, Berlin, 1996.

[15] Willms, A.: *C++-Programmierung lernen.* Addison-Wesley Verlag, Bonn, 1998.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Thorsten Kunow, dass die Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe, nur unter Benutzung der angegebenen Literatur angefertigt worden ist.

Kassel, 4. August 2003 _____

Thorsten Kunow